Olimpíadas Matemáticas de Centro América y el Caribe (1999–2007) Problemas y Soluciones

Compilados por José H. Nieto (jhnieto@cantv.net)

Introducción

La *Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe* (OMCC) nació en 1999 con el propósito de promover la participación de los países de la región en concursos olímpicos de matemática, estimular la participación de jóvenes menores de 17 años en concursos matemáticos y fomentar el intercambio de experiencias académicas y organizativas para fortalecer el recurso humano involucrado en este tipo de eventos.

La OMCC se realiza con el auspicio permanente de la *Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura* (OEI) y el apoyo eventual de otras organizaciones públicas y privadas, según el país anfitrión.

Cada país participa con un equipo de hasta tres estudiantes y un profesor, como Jefe de Delegación. También pueden asistir otros profesores en calidad de observadores, tutores o asistentes al seminario que se desarrolla paralelamente a la competencia y que busca elevar el nivel matemático de los participantes, capacitándolos como promotores y entrenadores olímpicos.

El desarrollo de la olimpiada es responsabilidad del Jurado Internacional, integrado por los Jefes de Delegación de los países participantes y un miembro designado por el Comité Organizador del país sede, quien lo preside. Este Jurado selecciona los problemas a proponer, establece los criterios de evaluación de los mismos y adjudica las medallas y otros premios.

La prueba se realiza en dos días consecutivos. Cada día los participantes disponen de cuatro horas y media para resolver tres problemas, cada uno de los cuales tiene un valor de siete puntos.

Durante los días siguientes los estudiantes confraternizan en paseos y otras actividades recreativas, mientras sus respuestas son evaluadas por sus respectivos Jefes de Delegación y por Tribunales designados para cada problema por el Comité Organizador. Posteriormente, en una sesión de *coordinación* entre los evaluadores se asignan los puntajes definitivos, quedando la decisión final a cargo del Jurado Internacional en caso de que se presenten diferencias de opinión irreconciliables. Las medallas se adjudican de tal manera que no más de la mitad de los participantes resulten premiados, con una proporción aproximada a

1:2:3 entre oro, plata y bronce. Los estudiantes que no obtienen medalla pero resuelven perfectamente un problema, reciben una mención honorífica.

Hasta el presente se han celebrado nueve de estas Olimpiadas, en Costa Rica (1999), El Salvador (2000), Colombia (2001), México (2002), Costa Rica (2003), Nicaragua (2004), El Salvador (2005), Panamá (2006) y Venezuela (2007). A continuación se incluyen los 54 problemas propuestos, con sus respectivas soluciones.

I OMCC (Costa Rica 1999)

1. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

   Solución: Primero probaremos que para n personas $2n-2$ llamadas son suficientes. Enumeremos las personas desde 1 hasta n. Si se efectúan las llamadas 1 a 2, 2 a 3,..., $n-1$ a n, la persona n posee toda la información. Luego las llamadas n a 1, n a 2,..., n a $n-1$ hacen que todas posean la información completa. Veamos ahora la necesidad. Consideremos el momento en que alguien recibe por primera vez toda la información. Las demás $n-1$ personas deben haber hecho al menos una llamada hasta ese momento. Por otra parte, a partir de dicho momento las $n-1$ personas restantes deberán recibir al menos una llamada para completar su información. Luego el número de llamadas necesarias es al menos $2n-2$.

2. Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.

   Solución: Elijamos los últimos cuatro dígitos para que el número sea múltiplo de $5^4 = 625$, luego de lo cual tendremos amplia libertad para escoger las cifras restantes y aparearlas de modo que la suma de productos sea 625. Como no se permiten ceros podemos usar las terminaciones $625 \cdot 3 = 1875$, $625 \cdot 5 = 3125$, $625 \cdot 7 = 4375$ y $625 \cdot 9 = 5625$ y obtener, por ejemplo: $\underbrace{1\ldots1}_{994 \text{ unos}}994375$ y $\underbrace{1\ldots1}_{992 \text{ unos}}27891875$.

3. Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

7	8	9	
4	5	6	+
1	2	3	

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla $+$. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa $+$ y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es ésta?

Solución: Existe una estrategia ganadora para el jugador A, quien debe comenzar jugando el 9. A continuación se detallan las posibilidades de desarrollo del juego.

Si B juega 7, la suma llega a 16 y A jugará 9 nuevamente llevando la suma a 25, lo que obliga a B a jugar 3 (pues de lo contrario perdería en este momento), llegando la suma a 28, A juega el 2, llevando la suma a 30 y B perderá en su próxima jugada.

Si B juega 8, la suma llega a 17 y A jugará 9 llevando la suma a 26, lo que obliga a B a jugar 3 (pues otra jugada lo haría perder) llegando la suma a 29; A juega el 1, llevando la suma a 30 y B perderá en su próxima jugada.

Si B juega 6 la suma llega a 15 y A jugará 5 llevando la suma a 20; si B juega 2, 4, 6 u 8, A jugará 8,6,4 o 2 respectivamente, llevando la suma total a 30, con lo que B perderá en su próxima jugada.

Si B juega 3, la suma llega a 12 y A jugará 6 llevando la suma a 18. Aquí hay dos opciones para B;

En la primera, si B juega 3 o 9, A jugará 9 o 3 respectivamente, llevando la suma total a 30 con lo que B perderá en su próxima jugada.

En la segunda, si B juega 4 o 5 , A jugará en cualquier caso 6, llevando la suma a 28 y 29 respectivamente. La menor jugada para B en este momento es 3, que suma con los resultados anteriores 31 o 32 perdiendo B nuevamente.

4. En el trapecio $ABCD$ de bases AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si $\overline{BC} = a$, $\overline{MC} = b$ y el ángulo MCB mide 150^o, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

   Solución: Sea N el punto medio del lado BC. Entonces el área del trapecio es $\overline{MN} \cdot h$, donde h es la altura del trapecio $ABCD$. El área del triángulo MNC es $\overline{MN} \cdot h/4$, la cuarta parte del área del trapecio. En dicho triángulo la altura sobre el lado NC es $\overline{MC} \cdot \operatorname{sen}(150^\circ) = b/2$. Luego el área del triángulo MNC es $ab/8$ y el área del trapecio $ABCD$ es $ab/2$.

5. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a-2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c, tales que $a+b$, $a+c$, $b+c$ y $a+b+c$ son cuatro cuadrados perfectos.

   Solución: Sea u el entero positivo definido por $3a-2 = u^2$. Consideremos las ecuaciones (1) $a+b = x^2$, (2) $a+c = y^2$, (3) $b+c = z^2$, (4) $a+b+c = t^2$.

De (3) y (4) se obtiene $a = t^2 - z^2 = (t-z)(t+z)$, que se puede satisfacer tomando $t-z = 1$, $t+z = a$, con lo cual (6) $t = (a+1)/2$. De (1), (2) y (4) se tiene $x^2+y^2 = 2a+b+c = a+t^2 = u^2+(\frac{a-3}{2})^2$, que se satisface tomando $x = u$ y $y = (a-3)/2$, resultando la solución $b = x^2-a = u^2-a = 2(a-1)$, $c = y^2 - a = (\frac{a-3}{2})^2 - a$.

Por último $c - b = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$, y luego de unas cuentas $y - x = \frac{1}{6}(u^2 - 6u - 7) = \frac{1}{6}(u+1)(u-7) > 0$, ya que $a > 17$ y por tanto $u^2 = 3a - 2 > 49$. Por lo tanto $c > b > 0$.

6. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.

   Solución: El conjunto $S = \{500, 501, 502, \ldots, 1000\}$ tiene la propiedad pedida y su cardinal es 501. Probaremos que éste es el máximo buscado.

   Sea S un conjunto que satisfaga la condición del problema y sean $A_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 499\}$, $A_2 = \{500, 501, 502, \ldots, 1000\}$, $S_1 = S \cap A_1$, $S_2 = S \cap A_2$ y $k = |S_1|$.

   Si $k = 0$ entonces obviamente $|S| \leq 501$. Supongamos entonces que $k \geq 1$. Si $S_2 = \varnothing$ entonces $|S| \leq 499$. Si en cambio $S_2 \neq \varnothing$ sea s el mínimo elemento en S_2.

   Sea $B = \{1001, 1002, \ldots, 1499\}$. Si $a \in S_2$, claramente el trasladado $a + S_1 \subseteq A_2 \cup B$.

   Si $s \geq 501$ entonces $|B \cap (s + S_1)| \leq s - 501$, luego $|A_2 \cap (s + S_1)| \geq |s + S_1| - s + 501 = k - s + 501$.

   Ahora $A_2 \cap (s + S_1) \subseteq A_2 \setminus S_2$ y $\{500, \ldots, s-1\} \subseteq A_2 \setminus S_2$, y se deduce que $|A_2 \setminus S_2| \geq (s - 500) + (k - s + 501) = k + 1$. Luego $|S_2| \leq 501 - k - 1$, y $|S| = |S_1| + |S_2| \leq 500$.

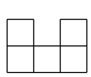
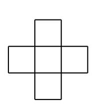
   Si $s = 500$ entonces $|A_2 \setminus S_2| \geq |500 + S_1| = k$, $|S_2| \leq 501 - k$ y $|S| \leq 501$.

II OMCC (El Salvador 2000)

1. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc ($a \neq 0$) tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

   Solución: $S = a^2 + b^2 + c^2$ debe ser 1, 2, 13 o 26. Con $S = 1$ se tiene el 100, con $S = 2$ se tienen 101 y 110, con $S = 13$ se tienen 203, 230, 302 y 320, con $S = 26$ se tienen 134, 143, 314, 341, 413, 431, 105, 150, 501 y 510.

2. Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a

    y .

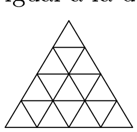
Notas:
a) Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos.
b) Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

Solución: Es posible para cualquier entero n positivo excepto 1, 2, 4 y 7. Comencemos por observar que si se forma un rectángulo con esas piezas, en el borde, para que no queden huecos aislados, deben ponerse piezas en forma de U con la base contra el lado o bien cruces con una U a cada lado, formando bloques rectangulares de 3×5. Por lo tanto si se puede construir un rectángulo de $15\times n$, n debe ser de la forma $3a+5b$ con a y b enteros no negativos. Se sigue de inmediato que no se pueden construir rectángulos de $15\times n$ si $n=1,2,4$ o 7. Veamos que para cualquier otro entero positivo n sí se puede. En efecto, con 3 bloques de 3×5 se puede formar el rectángulo de 15×3, y con 5 bloques el de 15×5. Con dos rectángulos de 15×3 se forma el de 15×6. Si $n\geq 8$ entonces consideremos tres casos:
a) $n=3k$. Entonces con k rectángulos de 15×3 se forma el de $15\times n$.
b) $n=3k+1$. Entonces $n=3(k-3)+10$, y con $k-3$ rectángulos de 15×3 y 2 de 15×5 se forma el de $15\times n$.
b) $n=3k+2$. Entonces $n=3(k-1)+5$, y con $k-1$ rectángulos de 15×3 y uno de 15×5 se forma el de $15\times n$.
con k rectángulos de 15×3 se forma el de $15\times n$.

3. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a $2/9$ del área del cuadrilátero $ABCD$.

   Solución: Sean K, L, M y N los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y DA, respectivamente. $KLMN$ es un paralelogramo ya que $KL \parallel AC \parallel NM$ y $LM \parallel BD \parallel KN$. Entonces $PQRS$ es también un paralelogramo por ser la imagen de $KLMN$ por la homotecia de centro E y razón $2/3$. Además el área de $PQRS$ (que denotaremos $[PQRS]$) es igual al área de $KLMN$ multiplicada por $(2/3)^2$, es decir $[PQRS]=\frac{4}{9}[KLMN]$. Pero por otra parte, como $[KBL]=\frac{1}{4}[ABC]$, $[NDM]=\frac{1}{4}[ADC]$, $[KAN]=\frac{1}{4}[BAD]$ y $[LCM]=\frac{1}{4}[BCD]$, resulta que $[ABCD]=[KLMN]+[KBL]+[KAN]+[NDM]+[LCM]=[KLMN]+\frac{1}{2}[ABCD.$ de donde $[KLMN]=\frac{1}{2}[ABCD]$, y finalmente $[PQRS]=\frac{4}{9}[KLMN]=\frac{2}{9}[ABCD]$.

4. En la figura, escribir un entero dentro de cada triangulito de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos.

   
   Nota: Dos triangulitos son *vecinos* si comparten un lado.

   Solución: Una solución se obtiene llenando dos bandas laterales con la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, el triangulito central con 0 y los tres triangulitos restantes con 4, como se indica en el siguiente diagrama:

```
          13
        5  8  4
     2  3  0  4  4
  1  1  2  3  5  8 13
```

5. Sea ABC un triángulo acutángulo, C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F ($F \neq A$) y C_1 corta al lado CA en el punto E ($E \neq A$). Además, BE corta a C_2 en P y CF corta a C_1 en Q. Demostrar que las longitudes de los segmentos AP y AQ son iguales.

   Solución: Como los triángulos AFQ y QFB son rectángulos y semejantes resulta que $FQ/FA = FB/FQ$, o sea $FQ^2 = FA \cdot FB$. Además por Pitágoras $AQ^2 = AF^2 + FQ^2 = AF^2 + FA \cdot FB = AF(AF + FB) = AF \cdot AB$. Análogamente $PE^2 = PE \cdot EC$ y $AP^2 = AE^2 + EP^2 = AE \cdot AC$. Ahora como los triángulos AFC y AEB son rectángulos y semejantes se tiene que $AF/AE = AC/AB$, o sea $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, de donde $FQ^2 = PE^2$ y $FQ = PE$.

6. Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n.

   a) Escriba las 5 representaciones buenas de 10.

   b) ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

   Solución: (a) $8 + 2$, $8 + 1 + 1$, $4 + 4 + 2$, $4 + 4 + 1 + 1$, $4 + 2 + 2 + 1 + 1$.

   (b) Sea $b(n)$ el número de representaciones buenas (r.b.) del entero n y sea $a(n)$ el número de r.b. de n que no incluyen el 1. A cada r.b. de n se le puede hacer corresponder una r.b. de $2n$ sin unos, multiplicando por 2 todos los sumandos. Es claro que esta correspondencia es una biyección y por lo tanto $a(2n) = b(n)$. Las r.b. de un impar $2n+1$ deben incluir un 1, y lo demás es una r.b. de $2n$ sin unos, por lo tanto $b(2n+1) = a(2n) = b(n)$. Las r.b. de $2n$ pueden incluir dos unos o ninguno, de donde se deduce fácilmente que $b(2n) = a(2n - 2) + a(2n) = b(n - 1) + b(n)$.

   Con las dos relaciones de recurrencia $b(2n + 1) = b(n)$ y $b(2n) = b(n - 1) + b(n)$ pueden calcularse fácilmente los primeros valores de la sucesión b: $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 1$, $b(4) = 3$, $b(5) = 2$, $b(6) = 3$, $b(7) = 1$, $b(8) = 4$, $b(9) = 3$, $b(10) = 5$, $b(11) = 2$. A partir de estos valores se puede conjeturar que $b(n)$ es par si y sólo si n es de la forma $3k + 2$. Probemos esto por inducción. Es claro que es cierto para los enteros del 1 al 11. Supongamos que es cierto para los enteros menores que $3k$ y vamos a probarlo para $3k$, $3k + 1$ y $3k + 2$. Distingamos dos casos, según que k sea par o impar.

Si $k = 2r$ entonces $b(3k) = b(6r) = b(3r) + b(3r-1)$ es impar más par, por lo tanto impar. $b(3k+1) = b(6r+1) = b(3r)$ es impar, y $b(3k+2) = b(6r+2) = b(3r) + b(3r+1)$ es par (suma de dos impares).

Análogamente si $k = 2r+1$ entonces $b(3k) = b(6r+3) = b(3r+1)$ es impar, $b(3k+1) = b(6r+4) = b(3r+1) + b(3r+2)$ es impar, y $b(3k+2) = b(6r+5) = b(3r+2)$ es par.

III OMCC (Colombia 2001)

1. Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

   Solución: El jugador A tiene una estrategia ganadora. Como 2001 es impar, en uno de los arcos que separan A de B hay un número par de personas. A debe tocar a su vecino en ese arco, para dejando así un número impar de personas en cada arco. En lo sucesivo A mantiene esa situación, tocando en su turno a su vecino en el mismo arco del que tocó B en su jugada previa. A la larga B tendrá que sacar a la última persona que quede en uno de los arcos, y en la jugada siguiente A saca a B.

2. Sea AB un diámetro de una circunferencia S con centro O y radio 1. Sean C y D dos puntos sobre S tales que AC y BD se cortan en un punto Q situado en el interior de S y $\angle AQB = 2\angle COD$. Sea P el punto de corte de las tangentes a S que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento OP.

   Solución: Sea $\alpha = \angle DAC = \angle DBC$. Se tiene $\angle AQB = \angle BCQ + \angle CBQ = 90° + \alpha$. Como $\angle COD$ es ángulo central para el arco CD se tiene que $\angle COD = 2\alpha$. La hipótesis $\angle AQB = 2\angle COD$ se convierte entonces en $90° + \alpha = 4\alpha$, de donde $\alpha = 30°$. Se sigue que $PD = OP/2$ y por Pitágoras $1 = OD^2 = OP^2 - (OP/2)^2$ de donde se despeja $OP = \sqrt{4/3}$.

3. Encontrar todos los números naturales N que cumplan las dos condiciones siguientes:

   - Sólo dos de los dígitos de N son distintos de 0 y uno de ellos es 3.
   - N es un cuadrado perfecto.

   Solución: Sea $N = M \cdot 10^t$ donde M es un número entero que no termina en 0 y t es un número entero. Si N es un cuadrado perfecto, necesariamente M debe ser un cuadrado perfecto y t debe ser par. Por lo tanto, podemos suponer inicialmente que N no termina en 0 y sabemos que a partir de los valores que obtengamos con esa suposición, los demás se obtienen agregando un número par de ceros a la derecha. Como N es un cuadrado perfecto su último d'gito sólo puede ser 1, 4, 5, 6 o 9. Sea k dicho d'gito y sea n el número de ceros que tiene N. Entonces $N = 3\underbrace{0\ldots0}_{n}k$.

Si $k = 9$ la suma de los dígitos de k sería múltiplo de 3 pero no de 9, luego N sería múltiplo de 3 y no de 9 y no podría ser un cuadrado perfecto.

Si $k = 5$ entonces N dejaría resto 2 al dividirlo entre 3, lo cual no puede ser pues todo cuadrado perfecto es congruente con 0 o 1 módulo 3.

Si $n > 0$ entonces $N \equiv k \pmod 4$, lo cual excluye la posibilidad $k = 6$ ya que los cuadrados perfectos son congruentes con 0 o 1 módulo 4. Si $n = 0$ entonces el único valor de k para el cual N es un cuadrado perfecto es 6, y obtenemos así la solución 36.

Si $k = 1$ o $k = 4$ pongamos $N = a^2$ con a entero positivo. Necesariamente $n > 0$ pues 31 y 34 no son cuadrados perfectos. Se tiene entonces que

$$N - k = 3 \cdot 10^{n+1} = 3 \cdot 5^{n+1} \cdot 2^{n+1} = (a - \sqrt{k})(a + \sqrt{k}).$$

Notemos que al ser k cuadrado perfecto (1 o 4), los dos factores al lado derecho de la igualdad son enteros positivos y al menos uno de ellos debe ser múltiplo de 5. Pero no pueden ser ambos múltiplos de 5 pues su diferencia es $2\sqrt{k}$, que no es múltiplo de 5. Por lo tanto uno de los factores debe ser múltiplo de 5^{n+1}. Ese factor es entonces al menos 5^{n+1} y el otro es a lo sumo $3 \cdot 2^{n+1}$. Como $n \geq 1$ entonces $2n \geq n + 1$ y

$$5^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} > 4^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} \geq 3(2^{2n} - 2^{n+1}) + 4^n \geq 4$$

Eso significa que la diferencia entre los dos factores es mayor que $2\sqrt{k}$ (que a lo sumo es 4) lo cual es absurdo. Luego no hay solución con $k = 1$ o $k = 4$. Agotadas todas las posibilidades se concluye que las únicas soluciones al problema son los números de la forma $N = 36 \cdot 10^{2t}$ con t entero no negativo.

4. Determinar el menor entero positivo n para el cual existan enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, menores o iguales que 15 y no necesariamente distintos, tales que los cuatro últimos dígitos de la suma $a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$ sean 2001.

   Solución: Si se calculan las cuatro últimas cifras de los factoriales de los enteros del 1 al 15 se obtiene 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 320, 2880, 8800, 6800, 1600, 800, 1200 y 8000. Por inspección se ve que $1! + 13! + 14! \equiv 2001 \pmod{10000}$. Una suma de este tipo con $n < 3$ no se puede obtener, ya que al ser 2001 impar uno de los factoriales debe ser 1!, y ninguno de los otros termina en 2000.

5. Sean a, b y c números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene

dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Se sabe que los números p_1, q_1, p_2, q_2, en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a+c=0$.

Solución: Es claro que a y c deben ser distintos de 0, y por tanto 0 no es raíz de ninguna de ambas ecuaciones. Además r es raíz de $ax^2+bx+c=0$ si y sólo si $1/r$ lo es de $cx^2+bx+a=0$. Por lo tanto q_1 y q_2 son p_1 y p_2, en algún orden. Si p_1, q_1, p_2, q_2 están en progresión aritmética entonces $|p_2-p_1| = |q_2-q_1| = |1/p_2-1/p_1| = |(p_1-p_2)/(p_1p_2)|$. Se sigue que $|c/a| = |p_1p_2| = 1$ y por lo tanto $c=a$ o $c=-a$. Pero $c=a$ es imposible pues entonces ambas ecuaciones serían iguales, la progresión aritmética tendría razón 0 y resultaría $p_1=p_2$. Por lo tanto $c=-a$ y $a+c=0$.

6. Se marcan 10000 puntos sobre una circunferencia y se numeran de 1 a 10000 en el sentido de las manecillas del reloj. Se trazan 5000 segmentos de recta de manera que se cumplan las tres condiciones siguientes:

   - Cada segmento une dos de los puntos marcados.
   - Cada punto marcado pertenece a uno y sólo un segmento.
   - Cada segmento intersecta exactamente a uno de los segmentos restantes.

   A cada segmento se le asocia el producto de los números asignados a sus dos puntos extremos. Sea S la suma de los productos asociados a todos los segmentos. Demostrar que S es múltiplo de 4.

   Solución: Es claro que los segmentos se pueden agrupar en 2500 cruces disjuntas. En cada uno de los cuatro arcos abiertos determinados por los extremos de una de estas cruces debe haber una cantidad de puntos marcados que sea múltiplo de 4. Por lo tanto en cada uno de los dos arcos abiertos determinados por los extremos de un mismo segmento hay un número de puntos de la forma $4k+1$. Si los números correspondientes a uno de estos segmentos son a y b entonces $b-a \equiv 2 \pmod 4$. Por lo tanto a y b son congruentes con 0 y 2 $\pmod 4$, en cuyo caso $ab \equiv 0 \pmod 4$, o lo son con 1 y 3, en cuyo caso $ab \equiv 3 \pmod 4$. Cada uno de estos casos se da para 2500 segmentos, luego la suma de todos los productos es congruente con $0 \cdot 2500 + 3 \cdot 2500 \equiv 0 \pmod 4$.

IV OMCC (Mexico 2002)

1. ¿Para qué enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, \ldots, n$ en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

   Solución: Obviamente se puede para $n=3$, y veremos que sólo en este caso. Si se pueden acomodar $l, 2, \ldots, n$ cumpliendp la cpndición pedida entonces no puede haber dos números pares consecutivos, ya que el siguiente también sería par y siguiendo así resultarían todos pares. Tampoco puede haber dos pares separados por un sólo impar. Por lo tanto después de cada número par debe haber al menos dos impares antes del próximo par. Esto implica que la cantidad de impares es por lo menos el doble de la cantidad de pares, lo cual sólo sucede si $n = 3$.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D y E los pies de las alturas desde los vértices A y B, respectivamente. Muestre que si

   área$(BDE) \leq$ área$(DEA) \leq$ área$(EAB) \leq$ área(ABD),

   entonces el triángulo es isósceles.

   Solución: Denotemos por $[XYZ]$ el área del triángulo XYZ. Sea H la intersección de AD y BE. Como $[BDE] \leq [DEA]$, restando el área de la parte común DEH resulta $[BDH] \leq [EAH]$. Del mismo modo de $[EAB] \leq [ABD]$, restando el área de la parte común ABH resulta $[EAH] \leq [BDH]$. Por consiguiente $[EAH] = [BDH]$ y de allí se sigue $[BDE] = [DEA]$. Como estos triángulos tienen la base DE común, sus alturas desde B y A deben ser iguales y AB debe ser paralela a DE. Como A, B, C y D son concíclicos se tiene que $\angle EAD = \angle EBD$ y $\angle DAB = \angle DEB = \angle EBA$. Sumando resulta $\angle CAB = \angle CBA$.

3. Para cada entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $\mathcal{L}(a)$ como sigue:

   (I) a es el primer número de la lista $\mathcal{L}(a)$.

   (II) Dado un número b en $\mathcal{L}(a)$, el siguiente número en la lista es $b + c$, donde c es el mayor entero que divide a b y es menor que b.

   Encuentre todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $\mathcal{L}(a)$.

   Solución: Desde luego que 2002 está en la lista $\mathcal{L}(2002)$. Supongamos que $\mathcal{L}(a) = \{a, \ldots, d, 2002, \ldots\}$ es una lista donde se encuentra 2002 y $a \neq 2002$; los números de !a lista son mayores que 1 y van creciendo, ya que $b < b+c$. Si p es el primo más pequeño que divide a d y $m = d/p$ entonces el número de la lista que sigue a d es $d+m = mp+m = m(p+1) = 2002$. Como $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = m(p+1)$, p no puede ser 2. Luego $p+1$ es par y mayor que 2. Alguno de los números 7, 11, 13 divide a $p+1$, por lo que $p \geq 2 \cdot 7 - 1 = 13$. Si un primo menor que 13 divide a m, este primo divide a d, lo cual es imposible porque elegimos p como el menor primo que divide a d. Luego 7 y 11 no dividen a m, por lo que tienen que dividir a $p+1$. Luego $p > 2 \cdot 7 \cdot 11 - 1 > 13$, de donde 13 tampoco divide a m La única posibilidad que resta es que m sea 1 y que p sea $2002 - 1 = 2001$, pero $2001 = 3 \cdot 667$ no es primo. Todo lo anterior muestra que la única lista que contiene a 2002 es $\mathcal{L}(2002)$.

4. Sean ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E un punto sobre el segmento AC tal que $BE = 2AD$ y F el punto de intersección de AD con BE. Si el ángulo DAC mide $60°$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo FEA.

Solución: Tracemos por D una paralela a BE y sea H el punto en que esta paralela corta al lado AC. Como DH es paralela media del triángulo BCE se tiene que $DH = BE/2 = AD$- Por lo tanto ADH es isósceles, $\angle DHA = \angle DAC = 60°$ y por lo tanto también $\angle HDA = 60°$. Finalmente $\angle AFE = \angle AEF = 60°$.

5. Encuentre un conjunto infinito de enteros positivos S tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera n elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de S, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

   Solución: Sea $S = \{10^{2k+1} : k \geq 1\}$. Cualquier suma de elementos distintos de S acaba en un número impar de ceros y por lo tanto no es un cuadrado perfecto. Hay muchas otras soluciones.

6. En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

   Solución: Sea P_0, P_1,…,P_{2n} un camino. Pongamos $P_i = (x_i, y_i)$ y llamemos L al área que queda por debajo del camino y U al área que queda por encima. Sean P_{k-1}, P_k, P_{k+1} tres puntos consecutivos tales que el segmento $P_{k-1}P_k$ sea vertical y el segmento P_kP_{k+1} sea horizontal. Construyamos otro camino sustituyendo P_k por $P'_k = (x_k + 1, y_k - 1)$. Es claro que en el nuevo camino la suma de las x's aumenta en 1 respecto al camino original, mientras que el área debajo del camino disminuye en 1, por lo cual $L + \sum x_i$ no cambia (es un invariante). Mediante modificaciones sucesivas de este tipo podemos llegar al camino que tiene n segmentos horizontales seguidos de n segmentos verticales, para el cual $L+\sum x_i = 0+(0+1+2+\cdots+n)+(n+\cdots+n) = n(n+1)/2+n^2$. Por lo tanto para cualquier camino se tiene $L+\sum x_i = n(n+1)/2+n^2$. Intercambiando los ejes se prueba del mismo modo que $U+\sum y_i = n(n+1)/2+n^2$. Por tanto $L + \sum x_i = U + \sum y_i$. Esta igualdad muestra que $L = U$ si y sólo si $\sum x_i = \sum y_i$.

V OMCC (Costa Rica, 2003)

1. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador

que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una *estrategia ganadora* y describir dicha estrategia.

Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

Solución: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (impar-impar = par) .

- Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.

- Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

2. Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con AC y AD y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

   Solución: Como $\angle AGB = \angle AHB = 90°$ y los triángulos AGB y AHB tienen el lado común AB, serán suficiente con demostrar que $\angle ABH = \angle ABG$ pues entonces los triángulos AGB y AHB son congruentes y por tanto $AG = AH$.

   Como $AEBH$ y $AGBF$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle AEH = \angle ABH$ y $\angle GBA = \angle GFA$.

   Ahora, como $\angle AEH + \angle CED = 180° = \angle GFA + \angle CFD$, si $\angle CED = \angle CFD$, entonces $\angle AEH = \angle GFA$.

   Para demostrar que $\angle CED = \angle CFD$ basta demostrar que $CEFD$ es cíclico. Esto se sigue de ver que el triángulo ABE es semejante al triángulo ABC y que el triángulo AFB es semejante al triángulo ABD.

   Entonces de la primera semejanza, $AB^2 = AE \cdot AC$ y de la segunda semejanza, $AB^2 = AD \cdot AF$. En consecuencia, $AE \cdot AC = AD \cdot AF$ y $CEFD$ es cíclico.

   Otra manera de probar que $CEFD$ es cíclico es observando que los triángulos AEB y ABC son semejantes ya que son rectángulos y comparten el ángulo $\angle EAB = \angle CAB$. Por lo tanto $\angle ABE = \angle BCA$.

   Además $\angle ABE = \angle AFE$ ya que $ABEF$ es cíclico y ambos ángulos subtienden el mismo arco. Luego

   $$\angle EFD = 180° - \angle AFE = 180° - \angle ABE = 180° - \angle ACB = 180° - \angle ECD.$$

Por lo tanto, $\angle EFD + \angle ECD = 180°$ y $CEFD$ es cíclico.

3. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

   Solución: Se procederá por inducción sobre b.

   Para $b = 3$, se tiene que $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2-a+1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$.

   Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b, es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b+1$.

   Nótese que

$$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2,$$

   donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

$$ab(a+1) - (a+1) + 2 = (a+1)(ab-1) + 2 > (ab-1)(a+1).$$

   Finalmente, $ab - 1 \geq 2b - 1 = (b+1) + (b-2) > b+1$, lo cual es cierto.

   Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a-1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2$, $b = 3$. Esto concluye la solución.

4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

   i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.

   ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

   Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

   Solución: Se demostrará que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, de donde el resultado se sigue de forma inmediata.

   Nótese inicialmente que como $A_1P \parallel B_1Q$, entonces A_1PQB_1 es un trapecio isósceles y sus diagonales son iguales, de donde $A_1Q = B_1P$. Ahora bien, como $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$ por estar inscritos en el mismo arco, y $\angle PA_2Q = PB_2Q$ por la misma razón, entonces $\triangle A_1QA_2$ y $\triangle B_1PB_2$ son semejantes. Como ya se demostró la igualdad entre un par de lados adyacentes, la congruencia de los triángulos se sigue, y el resultado es ahora inmediato.

5. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

   Solución: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNBNBN o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las 2^8-2 coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2\cdot 2^7+2^8-2 = 2^9-2 = 510$ coloraciones.

6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

   i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

   ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

   Solución:

   i. Se construye N con 2003 unos separados por grupos de tres ceros, así:
   $$N = 1000100010001\ldots100010001.$$
   Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n, entonces $s(N) = 2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N\cdot k$ es igual a 2003 k's separados por grupo de 3,2,1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1,2,3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N\cdot k) = 2003k$ y $N\cdot k$ es *tico*.

   ii. Supongamos que existe un tal número N. Escribamos $N = 2^\alpha 5^\beta N_1$ donde N_1 es coprimo con 10. Sea $\gamma = \max\{\alpha,\beta\}$. Para cada entero positivo m, tenemos que $mN\cdot 2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta} = m\cdot N_1\cdot 10^\gamma$ y $s(mN_1 10^\gamma) = s(mN_1)$. Por lo tanto, podemos suponer que N es coprimo con 10 (si no, cambiamos N por N_1).

   Como N_1 es coprimo con 10, es bien conocido que existe un múltiplo suyo A de la forma
   $$A := \underbrace{11\ldots1}_{\ell \text{ veces}}$$

(en efecto, tomando $M = 9N$ y poniendo $\ell := \phi(M)$ por el Teorema de Euler tenemos que $10^{\phi(M)} - 1 \equiv 0 \pmod{9N}$, y por lo tanto,

$$\underbrace{11\ldots1}_{\phi(M)\text{ veces}} = \frac{10^{\phi(M)} - 1}{9}$$

es múltiplo de N).

Entonces A es un múltiplo de N y $s(A) = \ell$. Por lo tanto ℓ es un múltiplo de 2003. De acá se puede concluir de dos maneras:

1. Entonces $6A$ y $4 \cdot 10^{\ell-1}A$ son múltiplos de N y la suma de ellos también, y es

$$\underbrace{44\ldots4}_{\ell-2\text{ veces}}50\underbrace{66\ldots6}_{\ell-1\text{ veces}}$$

cuya suma de dígitos es $4(\ell-2) + 5 + 6(\ell-1) = 10\ell - 9$. Como ℓ se divide por 2003, $10\ell - 9$ no se puede dividir por 2003, y hemos obtenido la contradicción deseada.

2. Tenemos

$$A := \underbrace{11\ldots1}_{\ell\text{ veces}}$$

entonces $A \cdot 19$ es

$$\underbrace{99\ldots9}_{\ell\text{ veces}} + \underbrace{11\ldots1}_{\ell\text{ veces}}0 = 2\underbrace{11\ldots1}_{\ell-2\text{ veces}}09$$

y por tantro $s(A \cdot 19) = \ell + 9$. Pero ℓ y $\ell + 9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003.

VI OMCC (Nicaragua, 2004)

1. En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.

   Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

   Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.

   Solución I: En primer lugar observemos que si queda una cantidad impar de números ninguno de los cuales sea múltiplo de otro, el jugador que tiene el turno pierde.

   El primer jugador (A) gana borrando 4 y 8.

Si B borra todos los que quedan, pierde de inmediato.

Si B borra 2 y 6, A borra 3 y 9 y gana.

Si B borra 3, 6 y 9, A borra cualquiera de los que quedan y gana.

Si B borra 6, A borra 9 y gana.

Si B borra 7, A borra 3, 6 y 9 y gana.

Si B borra 9, A borra 6 y gana.

Solución II: El primer jugador (A) también gana borrando 5 o 7 en su primer jugada.

2. Se define una sucesión a_0, a_1, a_2,... de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$.

   Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

   Solución: Los primeros términos de la sucesión son 1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67, 109, 177, 287, 465, 753, 1219, 1973. A partir de $r = 16$ se tiene $a_r > 2004$. Por tanto, $0 < m \neq n < 16$. Se va a contar el número de enteros menores a 2004 que se pueden expresar como $a_m + a_n$. Se tienen en total $\binom{15}{2}$ posibles sumas, de las cuales 8 son mayores que 2004. Se demostrará que todas estas sumas son distintas entre si.

   Supóngase que existan índices m,n, p, q con $m < n$ y $p < q$ tales que $a_m + a_n = a_p + a_q$ y $n \neq q$. Supóngase, sin perder generalidad, que $n > q$. Entonces

   $$a_m + a_n > a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1 > a_{n-1} + a_{n-2} \geq a_q + a_{q-1} \geq a_q + a_p.$$

   Por lo tanto todas estas sumas son diferentes y el número de enteros positivos menores que 2004 que se pueden expresar en la forma propuesta en el enunciado es igual a $105 - 8 = 97$.

3. Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

   Solución: Sea E' el corte de la paralela a CA por E con el lado AB. Sea E'' el corte de la paralela a CB por E' con el lado CA. Tenemos entonces:

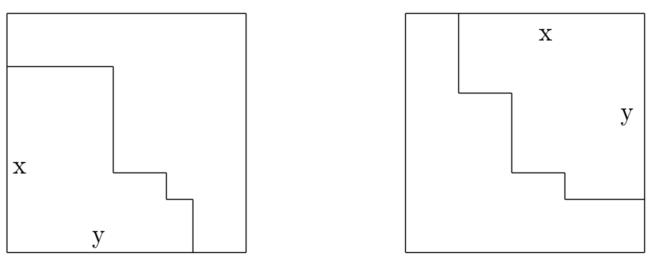
   $$CE'' = CA\frac{CE''}{CA} = CA\frac{BE'}{BA} = CA\frac{BE}{BC} = CA\left(1 - \frac{CE}{CB}\right) = CA\frac{CF}{CA} = CF$$

   De donde se deduce que $F = E''$. Por lo tanto $CEE'F$ es un paralelogramo (ya que $EE' \parallel CF$ y $E'F \parallel CE$). Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, entonces CE' pasa por M, de donde $G = E'$. Entonces $CEGF$ es un paralelogramo y por lo tanto $\triangle FEG \sim \triangle EFC$. Por otro lado, $\angle ECF = \angle ACB$ y $\angle CEF = \angle CAB$, de donde $\triangle EFC \sim \triangle ABC$. Tenemos entonces que $\triangle FEC \sim \triangle EFC \sim \triangle ABC$.

4. Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

   Solución: El máximo es 180 y se obtiene cuando el tablero se colorea como un tablero de damas. En efecto, los segmentos que pueden ser frontera son los interiores (los que no pertenecen al borde del tablero) y todos ellos son frontera cuando se colorea el tablero como un damero.

   El mínimo es 10, y se obtiene cuando todas las casillas a un lado de una mediana (una de las dos líneas que unen puntos medios de lados opuestos) se pintan de un color y las que están del otro lado se pintan del otro color. Para probar que efectivamente 10 es el mínimo observemos que el número de segmentos frontera verticales entre dos columnas adyacentes no puede superar a la diferencia (en valor absoluto) entre los números de casillas negras en cada columna. Por lo tanto, si se modifica cada columna poniendo todas las casillas blancas encima de las negras, el número de segmentos frontera no crece. Repitiendo este proceso para las filas, se obtiene una coloración con menor o igual número de segmentos frontera y en la cual si una casilla es negra también lo son todas las que se encuentran debajo o a la izquierda de ella. Si en esta coloración hay una fila completamente blanca y otra completamente negra (o una fila completamente blanca y otra completamente negra) es claro que debe haber al menos 10 segmentos frontera. De lo contrario se presentará una de las dos siguientes configuraciones:



   En cada una de ellas el número de segmentos frontera es $x+y$, y en ambos casos se tiene

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{50} > 10.$$

5. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

   a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.

   b) Sea Q el punto medio de BC y R el punto de corte de la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

Solución: Parte a) Sea $\angle PAB = 2\alpha$. Como $ABCD$ es un trapecio, entonces $\angle PDB = 180° - 2\alpha$. Como los triángulos ABP y CPD son isósceles, entonces $\angle PAB = 90° - \alpha$ y $\angle DPC = \alpha$. Se sigue que $\angle BPC = 180 - \angle APB - \angle DPC = 90°$.

Parte b) Como A, B, Q y R son concíclicos, entonces $\angle RBQ = \angle RAQ$. Llamemos β al valor común de esos ángulos. Como BPC es un triángulo rectángulo y Q es el punto medio de la hipotenusa, entonces $QP = QB$. Como $AB = AP$, entonces AQ es mediatriz del segmento PB. Por tanto, $\angle PAQ = \angle QAB = \beta$.

Ahora, como $\angle QAB = \angle QRB$, entonces $\angle QRB = \angle QBR$, de donde $QB = QR$, y se sigue que R está en una circunferencia con centro Q y radio QB. Esta circunferencia es la misma que pasa por los puntos B, P y C. El resultado pedido es ahora inmediato.

6. Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.

   Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.

   Nota: Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

   Solución: Observemos que se pueden tener n perlas ordenadas y de q posibles colores de q^n formas. Por lo que podemos hacer una biyección entre cada una de estas ordenaciones y los q^n colores. Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_{n^2})$ la configuración de un n^2 collar de perlas con q colores posibles. A partir de este collar particular se pueden formar una cantidad n de n collares con q^n colores posibles de la siguiente forma: Se toma un k y se forman n vectores de la forma $(a_i, a_{i+n}, \ldots, a_{i+n^2-n})$ donde i varía entre k y $n+k$ módulo n. Como por cada n^2 collar había q colores posibles para las perlas es claro que de los vectores que hemos formado se pueden hacer q^n combinaciones diferentes y a cada una asignarle un color. Así cada uno de estos vectores toma un color único y entonces se puede formar un n collar con q^n colores posibles tomando el color que genera el vector que originan los a_i's con i de resto 1, seguido por el color que genera el vector que originan los a_i's con i de resto 2, y así sucesivamente hasta el color que genera el vector que originan los a_i's con i de resto n. Variando el k por los n posibles restos se tienen los n collares. Es claro además que el n collar que genera el n^2 collar de perlas es primo si y sólo si este último es primo. Si se tiene un n^2 collar que no es primo es claro que el n collar que genera no puede ser primo.

Supongamos que cierto n^2 collar de perlas es primo y genera un collar $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ que no es primo. Entonces se tiene que a partir de cierto t se cumple que b_{t+i} es igual a b_i (evaluando los subíndices módulo n). Pero esto implica que los vectores que los originan también son iguales y que en el n^2 collar que lo genera también ha de existir cierto s tal que a_{s+i} es igual a a_i (evaluando los subíndices módulo n^2). Pero esto contradice el hecho de que el collar que lo genera es primo.

Como se ha establecido una correspondencia biyectiva entre los q^n colores y los vectores antes mencionados, resulta que para cada n collar se pueden traducir sus colores en vectores y llegar al n^2 collar de perlas que lo genera por la transformación antes explicada. Así que si dos n^2 collares generan un mismo n collar, entonces ellos deben ser iguales. Por lo que la transformación antes explicada es inyectiva, y como además de cada n collar se puede llegar al n^2 collar que lo genera se tiene que también esta transformación es sobreyectiva, y por lo tanto es biyectiva. De esto último sale que el número de n collares primos que pueden hacerse con perlas de q^n colores posibles es igual a n veces el número de n^2 collares primos que pueden formarse con q colores.

VII OMCC (El Salvador, 2005)

1. ¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

2. Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

3. En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

   a) Demuestre que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

   b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

4. Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

> *Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.*

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

Solución: Rojo tiene una estrategia ganadora, que consiste en seleccionar, cada vez que le toca jugar, una línea del tablero perpendicular a la seleccionada por Azul en su jugada previa. Es claro que esto es siempre posible, ya que luego de las dos primeras jugadas quedarán 9 filas y 9 columnas disponibles, luego de la cuarta jugada quedarán 8 filas y 8 columnas disponibles, etc.

Para probar que esta estrategia es ganadora observemos que cada casilla del tablero es pintada exactamente dos veces, una cuando uno de los jugadores selecciona la fila en la cual se encuentra la casilla, y otra cuando alguno selecciona su columna. Para fijar ideas numeremos las filas de 1 a 10 y también las columnas de 1 a 10, y convengamos en que en el turno de Rojo, si en la jugada previa Azul escogió la fila k entonces Rojo escoge la columna k, mientras que si Azul escogió la columna k, entonces Rojo escoge la fila k. Si en sus primeras jugadas Azul y Rojo seleccionaron la fila y columna i_1 (en ese orden o en el contrario) entonces la casilla (i_1, i_1) que está en la intersección de ambas líneas es la única que queda con su color definitivo, que será el rojo. Si en la tercera y cuarta jugadas seleccionan la fila y columna i_2 entonces tres nuevas casillas alcanzan su color final, a saber las (i_1, i_2), (i_2, i_2) y (i_2, i_1). De estas tres, dos son rojas y una azul. En general, con cada par de jugadas sucesivas la ventaja de las casillas con color definitivo rojo sobre las azules se incrementa en 1. En efecto, si en las jugadas $2k-1$ y $2k$ Azul selecciona la fila i_k y Rojo la columna i_k entonces las casillas (i_k, i_1), (i_k, i_2),...,(i_k, i_{k-1}) quedan con color definitivo azul, mientras que (i_1, i_k), (i_2, i_k),...,(i_{k-1}, i_k), (i_k, i_k) quedan con color definitivo rojo. Si Azul selecciona la columna i_k y Rojo la fila i_k entonces entonces las casillas (i_1, i_k), (i_2, i_k),..., (i_{k-1}, i_k) quedan con color definitivo azul y las (i_k, i_1), (i_k, i_2),...,(i_k, i_{k-1}), (i_k, i_k) quedan con color definitivo rojo.

De este modo, al finalizar el juego el número de casillas rojas superará en diez unidades al número de casillas azules y Rojo ganará el juego.

5. En un triángulo acutángulo ABC, sean H su ortocentro y M el punto medio del lado AC. Por M se traza una recta L paralela a la bisectriz del ángulo AHC. Demuestre que la recta L divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

   Solución:

6. Se tienen n cartas numeradas de 1 a n y p cajas para guardarlas, con p primo. Determine los posibles valores de n para los que se pueden guardar

todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.

Solución:

VIII OMCC (Panamá, 2006)

1. Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

Solución: Sea $u(n)$ la última cifra del número n. Es claro que $u(m+n) = u(u(m) + u(n))$. Ahora bien, $u(S_0) = u(1) = 1$ y $u(S_1) = u(2007) = 7$. Para calcular $u(S_2)$ observemos que la sucesión $u(2^k)$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$, es periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6,.... Por tanto

$$u(S_2) = u(1 + (2 + 4 + 8 + 6) \cdot 501 + 2 + 4) = u(10027) = 7.$$

Análogamente $u(S_3) = u(1 + (3 + 9 + 7 + 1) \cdot 501 + 3 + 9) = u(10033) = 3$, $u(S_4) = u(1 + (4 + 6) \cdot 1003) = 1$, $u(S_5) = u(1 + 5 \cdot 2006) = 1$, $u(S_6) = u(1 + 6 \cdot 2006) = 7$, $u(S_7) = u(1 + (7 + 9 + 3 + 1) \cdot 501 + 7 + 9) = 7$, $u(S_8) = u(1+(8+4+2+6)\cdot 501+8+4) = 3$, $u(S_9) = u(1+(9+1)\cdot 1003) = 1$, y finalmente

$$u(S_0+S_1+S_2+\cdots+S_9) = u(1+7+7+3+1+1+7+7+3+1) = u(38) = 8.$$

2. Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos pùntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera en Γ. Sea C el otro punto de corte de la recta AB con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud del segmento CD es constante, es decir que no depende de la elección de B.

   Solución:

3. Para cada número natural n, se define $f(n) = \lfloor n + \sqrt{n} + 1/2 \rfloor$. Pruebe que para cada $k \geq 1$ la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

4. El producto de varios nḿeros enteros mayores que 0 y distintos entre si, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

   Solución:

5. El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

   - Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
   - Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

   Determine el número de maneras de construir los puentes.

   Solución:

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Sean E, H, F y G puntos sobre los segmentos AB, BC, CD y DA respectivamente, tales que EF y GH se cortan en I. Sea M el punto de intersección de EG y AC y sea N el punto de intersección de HF y AC. Demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$

   Solución:

VI OMCC (Venezuela, 2007)

1. La OMCC es una competencia anual de matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n-ésima olimpiada?

   Solución: Sea $a(n)$ el año en que se realiza la n-ésima olimpiada. Entonces se tiene que $a(n) = 1998+n$, por lo que n divide a $a(n)$ si y sólo si n divide a 1998. Por lo tanto los n que cumplen con la condición son los divisores de 1998, y como $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ se tienen $(1+1)(3+1)(1+1) = 16$ valores posibles de n: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999 y 1998.

2. Sea ABC un triángulo, D y E puntos en los lados AC y AB, respectivamente, tales que las rectas BD, CE y la la bisectriz que parte de A concurren en un punto P interior al triángulo. Demuestre que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero $ADPE$ si y sólo si $AB = AC$.

   Solución: En primer lugar, supóngase que $ADPE$ es circunscribible. Sea O el centro del círculo inscrito en $ADBE$. Ya que este punto O es equidistante de AE y AD, debe pertenecer a la bisectriz de $\angle DAE$, es decir, a la línea AP. De esta forma, PO será entonces la bisectriz del ángulo $\angle DPE$, de donde los triángulos APD y APE son congruentes. Ahora, nótese que los triángulos APB y APC comparten el lado AP, que $\measuredangle BAP = \measuredangle CAP$ por ser AP bisectris de $\angle DAE$ y que $\measuredangle BPA = 180° - \measuredangle DPA = 180° - \measuredangle EPA = \measuredangle CPA$. Así, los triángulos APB y APC son congruentes, de donde $AB = AC$.

Ahora, suponiendo que $AB = AC$, el triángulo tendrá como eje de simetría la bisectriz AP, lo que permite afirmar inmediatamente que los triángulos APD y APE son congruentes, por lo que $AE + DP = AD + EP$, la condición básica sobre las longitudes de los lados de un cuadrilátero circunscribible.

3. Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p \neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

   Solución: Se demostrará que el máximo número de elementos que puede tener S es tres. En primer lugar, se mostrará un conjunto de tres elementos con la propiedad pedida, el conjunto $S = \{-1, 0, 1\}$. Para esto, nótese que el polinomio $1x^2 + 0x + (-1)$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 1; el polinomio $1x^2 + (-1)x + 0$ tiene coeficientes en S raíces 0, 1; el polinomio $1x^2 + 1x + 0$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 0. Así, el conjunto S dado cumple la condición.

   En segundo lugar, se mostrará que el conjunto no puede tener más de tres elementos. Procediendo por contradicción, supóngase que el conjunto S tiene al menos dos elementos con valor absoluto mayor que 1, sean p, q los dos elementos con mayor valor absoluto en el conjunto (con $|p| \geq |q|$). Según las condiciones del problema, existen A, B, C en S, con $A \neq 0$, tales que el polinomio $Ax^2 + Bx + C$ tiene raíces p, q. Según las fórmulas de Vieta, debe cumplirse que $Apq = C$, de donde $|C| = |A||p||q| \geq 2|p| > |p|$, lo que contradice la hipótesis de tener a p, q como los elementos con mayor valor absoluto en el conjunto. De esta forma, solamente podría encontrarse un elemento en el conjunto con valor absoluto mayor que 1, de donde la mayor cantidad de elementos que podría tener el conjunto será cuatro, siento estos -1, 0, 1, n para algún n entero con valor absoluto mayor que 1. Si n es positivo, el coeficiente del término lineal en el polinomio que tenga raíces 1 y n debe tener valor absoluto mayor o igual que $n + 1$, contradicción. Lo mismo sucederá si n es negativo, considerando el coeficiente del término lineal en el polinomio con raíces -1 y n. De esta forma, no es posible que el conjunto buscado tenga cuatro elementos. Se concluye así que el máximo posible es tres elementos.

4. Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f y g. Se dice que

una palabra *produce* a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

a) Cambiar una letra por dos letras de acuerdo a las siguientes regla:

$$a \to bc,\ b \to cd,\ c \to de,\ d \to ef,\ e \to fg,\ f \to ga,\ g \to ab.$$

b) Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Ejemplo: $dfd \to f$.

Por ejemplo, $cafcd$ produce a $bfcd$, porque

$$cafcd \to cbcfcd \to bfcd.$$

Demuestre que en esta isla toda palabra produce a cualquier otra palabra.

Solución: Usaremos la notación $\to\to$ para indicar que una palabra produce a otra. Observemos que $a \to bc \to cdc \to d$ y por lo tanto $a \to\to d$. Análogamente $d \to\to g$, $g \to\to c$, $c \to\to f$, $f \to\to b$, $b \to\to e$ y $e \to\to a$. Por lo tanto, cada letra produce a cualquier otra. Esto significa que cualquier palabra de n letras, cambiando ordenadamente cada una de sus letras en a, produce la palabra formada por n letras a. Suponiendo que n es impar, aplicando la segunda regla a la palabra original, podemos llevarla fácilmente a la palabra formada por una sola a. Si n es par, entonces es claro que la palabra original produce la palabra aa, eliminando letras de dos en dos. Pero como a produce g, se tiene $aa \to\to ga \to aba \to b \to\to a$.

Ahora observemos que las reglas dadas son reversibles, lo cual asegurará que la palabra a produce cualquier otra palabra. En efecto,

$$bc \to\to bg \to bab \to a,$$

y análogamente para las demás instancias de la primera regla.

Además, $f \to\to b \to cd \to ded \to\to dfd$ y análogamente para las demás instancias de la segunda regla.

5. Dados dos números enteros no negativos m, n, con $m > n$, se dirá que m *termina* en n si es posible borrar algunos dígitos de izquierda a derecha de m para obtener n. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29, únicamente. Determine cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

Solución: Nótese que si el número termina en 0, entonces el producto de sus dígitos es también 0 y por lo tanto cumple la condición de terminar en el producto de sus dígitos. De esta forma, todos los números de tres dígitos que terminan en 0 cumplen la condición, 90 números en total.

Supóngase ahora que el número buscado es de la forma $\overline{abc}$, con $c \neq 0$. Se busca que $abc = c$ o que $abc = \overline{bc}$.

En el primer caso, $abc = c$, cancelando c en los dos lados (que es posible porque $c \neq 0$) se tiene $ab = 1$, de donde $a = b = 1$. En total existen diez números de tres dígitos con $a = b = 1$, pero uno de ellos ya fue contado (110), por lo que solamente se agregan 9 posibles números que cumplen la condición.

En el segundo caso, $abc = \overline{bc}$ se puede escribir como $abc = 10b+c$, de donde se tiene automáticamente que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, además de $b \mid 10b + c$ que implica $b \mid c$. En la misma forma se puede obtener $c \mid 10b$, por lo que las posibles parejas (b, c) se reducen a (1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9). De estas parejas, los únicos números que se pueden construir según las condiciones del problema son 612, 315, 324 y 236. Se obtiene de esta forma 4 posibilidades más.

Sumando todas las cantidades obtenidas, el total de números de tres dígitos que terminan en el producto de sus dígitos es $90 + 9 + 4 = 103$.

6. Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que la tocan en A y B. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM corta a S en C (interior al ΔABP), la recta AC corta a la recta PM en G, y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triángulo ΔABP. Si $BD||AC$, demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del ΔABP.

   Solución: El ΔAMG es rectángulo, por lo que la mediatriz de AM corta a la hipotenusa en el circuncentro C del triángulo, por lo que $CA = CG$. Por simetría, si E es la intersección de BG con S, se tendrá que $EG = EB = AC$.

   Como $AG||BD$ y M es punto medio de AB, se observa que los triángulos rectángulos ΔAMG y ΔBMD son congruentes, por lo que $AG = BD$, y por simetría $AG = BG$, así $BD = BG$. Si F es la intersección de AG con BP, usando nuevamente el paralelismo anterior $\angle BGF = \angle DBE$, y por ángulo semi-inscrito $\angle FBG = \angle BDE$. Luego, por criterio ALA , los triángulos ΔBDE y ΔBGF son congruentes, por lo que $GF = BE$.

   Así, en el ΔABP, se tiene que G es punto sobre la mediana PM tal que $AG = 2GF$, se puede concluir casi inmediatamente que G es en efecto el baricentro, una manera de argumentarlo es por contradicción, suponiendo G' (distinto de G) el baricentro de ΔABP, ubicado sobre PM y tal que $AG' = 2G'F'$ (F' la intersección de AG' con BP), de donde se concluiría por el recíproco de Thales que $GG'||FF'$, es decir $MP||BP$, lo cual es contradictorio. Otra manera de argumentarlo es aplicando Menelao al ΔABF con los puntos alineados P, G y M, quedaría:

$$1 = \frac{BP}{PF}\frac{FG}{GA}\frac{AM}{MB} = \frac{BP}{2PF}.$$

   Por lo que F es punto medio de BP y de allí el resultado.