

República Bolivariana de Venezuela  
Universidad del Zulia - Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemática  
División de Programas Especiales

## Matemática Discreta - Hoja de Ejercicios #09

Prof. José H. Nieto

### Ejercicios

1. Diga cuáles de los siguientes son conjuntos parcialmente ordenados y cuáles no lo son, y porqué: (a)  $(\mathbb{N}, \leq)$ ; (b)  $(\mathbb{Z}, >)$ ; (c)  $(\mathbb{R}, \geq)$ ; (d)  $(\mathbb{N}, |)$ ; (e)  $(\wp(\mathbb{N}), \supset)$ ; (f)  $(\wp(\mathbb{N}), \subsetneq)$ ; (g)  $(\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ; (h)  $(\mathbb{N}, =)$ .
2. En el conjunto de los seres humanos considere la relación “es hijo o hija de”. ¿Es una relación de orden? ¿Cómo se puede extender a una relación de orden?
3. Sea  $X = \{2, 4, 5, 10, 25, 50, 100\}$  ordenado parcialmente por divisibilidad.
  - (a) ¿Tiene  $X$  un elemento mínimo? (b) ¿Tiene máximo?
  - (c) Halle todos los elementos minimales de  $X$ . (d) ¿Es  $X$  un retículo?
  - (e) Halle  $4 \wedge 10$  y  $4 \vee 10$ .
4. Sea  $X = \wp(\{1, 2, 3, 4\})$  ordenado parcialmente por inclusión.
  - (a) Dibuje el diagrama de Hasse.
  - (b) Halle una cadena maximal en  $X$ .
  - (c) Halle una anticadena maximal en  $X$ .
  - (d) Halle una partición de  $X$  en cadenas con el menor número de bloques que sea posible.
  - (e) ¿Cuál es el número de Dilworth de  $X$ ?
5. Sea  $Y$  un conjunto y  $X = \wp(Y)$  ordenado parcialmente por inclusión. Si  $A, B \in X$ , ¿qué son  $A \wedge B$  y  $A \vee B$ ? Más en general, ¿qué son el ínfimo y el supremo de un subconjunto de  $X$ ?

6. Considere el conjunto  $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$  ordenado por divisibilidad.
  - (a) Dibuje el correspondiente diagrama de Hasse.
  - (b) Extienda ese orden parcial a un orden lineal.
7. Considere el conjunto de los enteros del 1 al 100 ordenados por divisibilidad. El subconjunto  $\{3, 4, 5\}$ , ¿tiene máximo? ¿cuáles son sus cotas superiores? ¿cuál es su supremo?
8. Considere el conjunto de los enteros del 1 al 1000 ordenados por divisibilidad. El subconjunto  $\{50, 180, 600\}$ , ¿tiene mínimo? ¿cuáles son sus cotas inferiores? ¿cuál es su ínfimo?
9. Considere el conjunto de los números reales con el orden  $\leq$  usual, y sea  $A = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Halle  $\inf A$  y  $\sup A$ .
10. ¿Cuántos órdenes parciales diferentes se pueden definir en un conjunto de dos elementos  $\{a, b\}$ ? ¿cuáles de esos órdenes son isomorfos?
11. ¿Cuántos órdenes parciales no isomorfos se pueden definir en un conjunto de tres elementos  $\{a, b, c\}$ ?
12. Un glosario consta de los términos  $p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ . En la definición de  $s$  se utilizan los términos  $p, q$  y  $z$ , lo que indicaremos con la notación  $s : [p, q, z]$ . Del mismo modo se tiene  $u : [x, w]$ ,  $q : [y, t]$ ,  $w : [z, p, v]$ ,  $z : [x, t, r]$ ,  $t : [v]$ ,  $x : [p, v]$ ,  $y : [x, r]$ ,  $p : [r]$ . Halle una forma de ordenar los términos en el glosario de manera que en cada definición sólo aparezcan términos que hayan sido definidos con anterioridad.

## Problemas

1. Pruebe que el número de Dilworth del conjunto de partes de un conjunto de  $n$  elementos, ordenado parcialmente por inclusión, es  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .