República Bolivariana de Venezuela
Universidad del Zulia - Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática
División de Programas Especiales

Matemática Discreta - Hoja de Ejercicios #07

Prof. José H. Nieto

Ejercicios

1. Escriba todas las particiones del conjunto $\{a, b, c, d\}$.
2. Partiendo de $B_0 = B_1 = 1$, calcule los números B_2, B_3, B_4, B_5 y B_6 aplicando la fórmula de recurrencia.
3. Escriba todas las particiones del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ que tengan exactamente 4 bloques y verifique que son $\left\{ {5 \atop 4} \right\} = 10$.
4. ¿Cuántas particiones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tienen cuatro bloques de dos elementos cada uno? ¿Y cuántas hay del tipo 0,1,0,2,0,0,0,0?
5. Calcule los números $\left\{ {5 \atop k} \right\}$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ y luego calcule $\left\{ {6 \atop 3} \right\}$.
6. Dadas las permutaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Obtenga σ^{-1} y τ^{-1}.
   b) Calcule las composiciones $\sigma\tau$ y $\tau\sigma$.
   c) Descomponga σ y τ en producto de ciclos disjuntos.

7. Escriba todas las permutaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que se descomponen en producto de 2 ciclos disjuntos.
8. ¿Cuántas permutaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ se descomponen en cuatro ciclos disjuntos de dos elementos cada uno? ¿Y cuántas tienen tipo 0,1,0,2,0,0,0,0?

9. Muestre que si una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ se descompone en $n-2$ ciclos disjuntos entonces debe ser del tipo $n-3$,0,1,0,...,0 o del tipo $n-4$,2,0,0,...,0. Deduzca que
$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

10. Calcule los números $\left[{4 \atop k}\right]$ para $k = 1, 2, 3, 4$ y luego calcule $\left[{5 \atop 3}\right]$.

11. Pruebe que $\left[{n \atop k}\right]$ es igual a la suma de todos los productos de $n-k$ factores distintos entre 1 y $n-1$. Por ejemplo:
$\left[{5 \atop 3}\right] = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35.$

12. El siguiente algoritmo ordena por selección el arreglo $a_1,\ldots,a_n$.

    para k **desde** 1 **hasta** $n-1$ {
    $\quad m \leftarrow a_k;\ i \leftarrow k;$
    $\quad$**para** j **desde** $k+1$ **hasta** n
    $\quad\quad$**si** $a_j < m$ **entonces** { $m \leftarrow a_j;\ i \leftarrow j;$ }
    $\quad a_i \leftarrow a_k;\ a_k \leftarrow m;$
    }

    Calcule el número de asignaciones que se realizan en promedio.

Problemas

1. Pruebe que $\left\{{n \atop n-3}\right\} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$.

2. Pruebe que el número de particiones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k clases que no contengan elementos consecutivos es $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$.

3. Pruebe que
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$$
donde $x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ y por convención $x^{\underline{0}} = 1$ y $x^{\underline{1}} = x$.

4. Pruebe que $\left\{{n \atop k}\right\}$ es igual a la suma de todos los productos de $n-k$ factores entre 1 y k, donde puede haber factores repetidos. Por ejemplo,
$$\left\{{5 \atop 3}\right\} = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 = 25.$$