República Bolivariana de Venezuela
Universidad del Zulia - Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática
División de Programas Especiales

Matemática Discreta - Hoja de Ejercicios #02

Prof. José H. Nieto

Ejercicios

1. Sea $f : \{1,2,3,4,5\} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x^2 + x + 1$. Exprese f como un conjunto de pares ordenados.

2. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x^2$. Calcule (a) $f(-3)$, (b) $f(\{-2,1,5\}$, (c) $f^{-1}(\{4\})$, (d) $f^{-1}(\{3\})$, (d) $f^{-1}(\{4,5,6,7,8,9\})$.

3. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x^2 + x + 1$.

   (a) ¿Es f inyectiva?

   (b) ¿Es f sobre?

   (c) ¿Es $f|\mathbb{N}$ inyectiva?

4. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 2$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = x^3$. Calcule (a) $f^{-1}(x)$, (b) $f \circ g(x)$, (c) $g \circ f(x)$, (d) $f^{-1} \circ g(x)$, (e) $g(x) \circ f^{-1}$.

5. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Pruebe que:

   (a) Si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ también lo es.

   (b) Si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ también lo es.

   (c) Si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ también lo es.

6. Pruebe que si f es una biyección entonces f^{-1} también lo es.

7. Sea $f : A \to B$. Pruebe que

   (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ para cualquier par de subconjuntos X, Y de A.

(b) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para cualquier par de subconjuntos X, Y de A si y sólo si f es inyectiva.

(c) $f(A \setminus X) \subset B \setminus f(X)$ para todo subconjunto X de A si y sólo si f es inyectiva.

(d) $f(A \setminus X) \supset B \setminus f(X)$ para todo subconjunto X de A si y sólo si f es sobreyectiva.

8. Si $f : A \to B$, una función $g : B \to A$ se dice que es *inversa por la derecha* de f si $f \circ g = I_B$. Análogamente se dice que g es *inversa por la izquierda* si $g \circ f = I_A$. Pruebe que

   (a) f tiene inversa por la derecha si y sólo si f es sobre.

   (b) f tiene inversa por la izquierda si y sólo si f es inyectiva.

9. Sea $f : A \to B$ una función sobre y sea R la relación en A definida así: $x\,R\,y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$. Pruebe que R es una relación de equivalencia y que existe una biyección entre B y A/R.

Problemas

1. Si $f : A \to B$ y $X \subset A$, la notación $f(X)$ es potencialmente ambigua. Explique porqué.

2. Sea A un conjunto cualquiera. Pruebe que no existe ninguna función de A sobre $\wp(A)$.

3. Sea A un conjunto finito y $f : \wp(A) \to \wp(A)$ una función tal que si $X \subset Y$ entonces $f(X) \subset f(Y)$. Pruebe que f tiene un *punto fijo*, es decir que existe $Z \in \wp(A)$ tal que $f(Z) = Z$.