

Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto jhnieto@yahoo.com

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

Julio 2005

Tercer examen parcial

El **3er examen parcial** se realizará durante la semana del 25 al 29 de julio. Los temas para el 3er examen parcial son:

Conjuntos parcialmente ordenados.
Teoría de Grafos.

El material correspondiente son las Conferencias #9, #10, #11 y #12 y las Hojas de Ejercicios #9, #10 y #11.

Esquema

- 1 Coloración de grafos
 - Coloración por vértices
 - Coloración por aristas

Coloración por vértices

Definición

Dado un conjunto de colores C , una **coloración por vértices** de un grafo $G = (V, E)$ es una función $f : V \rightarrow C$ tal que si $uv \in E$ entonces $f(u) \neq f(v)$.

En otras palabras, una coloración por vértices de un grafo es una asignación de colores a los vértices de manera tal que a vértices adyacentes les correspondan colores diferentes. En realidad los elementos del conjunto C pueden ser objetos de cualquier naturaleza, y en última instancia lo único que interesa es su número, pero se usa la metáfora de los colores porque es intuitiva y fácil de comprender.

Grafo k -colorable

Definición

Un grafo G es **k -colorable** si admite una coloración con k colores. Al menor k tal que G es k -colorable se le llama **número cromático** de G y se denota $\chi(G)$.

Obviamente todo grafo de orden n es n -colorable. K_n no se puede colorear con menos de n colores, pues como todos sus vértices son adyacentes cada uno debe pintarse de un color diferente. Por lo tanto $\chi(K_n) = n$.

El número cromático de un grafo sin aristas es 1.

Un camino de longitud $n > 2$ tiene número cromático 2, ya que sus vértices pueden pintarse con dos colores en forma alternada, comenzando por un extremo.

Ejemplo

Ejemplo

En unas jornadas científicas se van a dictar cierto número de conferencias. Si los horarios de dos conferencias se solapan, éstas tienen que dictarse en salones distintos. Consideremos el grafo G que tiene como vértices a las conferencias, y en el cual dos conferencias son adyacentes si y sólo si sus horarios se solapan. Entonces decir que G es k -colorable equivale a decir que k salones son suficientes para dictar todas las conferencias. **El número cromático $\chi(G)$ representa el mínimo número de salones necesario para poder dictar todas las conferencias.**

Coloración de grafos

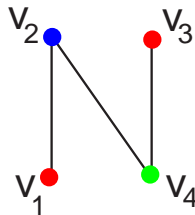
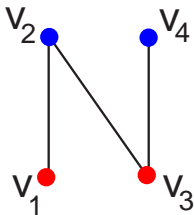
Algoritmo avaricioso

Dado un grafo numeremos sus vértices como v_1, v_2, \dots, v_n y los colores como $1, 2, 3, \dots$. El **algoritmo avaricioso** (en inglés **greedy**) intenta colorear el grafo por vértices ahorrando todos los colores que pueda.

- 1 Asigne el color 1 al vértice v_1 .
- 2 Para cada i desde 2 hasta n , asigne a v_i el color con el menor número posible que no haya sido ya usado para colorear un vértice adyacente al v_i .

Coloración de grafos

Lamentablemente los resultados del algoritmo avaricioso dependen de la numeración escogida. Para un camino de longitud 3, en la figura de la izquierda el algoritmo halla una coloración con el mínimo número de colores (2), pero con la numeración que se muestra a la derecha usa 3 colores.



Coloración de grafos

Acotación del número cromático

En todo caso el algoritmo avaricioso nos permite obtener una cota superior para el número cromático: lo peor que puede pasar cuando se va a colorear un vértice v_i es que todos sus adyacentes ya hayan sido coloreados con los colores $1, 2, \dots, g(v_i)$, en cuyo caso tendremos que usar el color $g(v_i) + 1$ para colorear v_i . Por lo tanto si $\Delta(G)$ es el máximo grado, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Por otra parte si $\omega(G)$ es el **número de clique** de G , es decir el orden del mayor subgrafo completo de G , entonces debe ser $\chi(G) \geq \omega(G)$. Combinando estas desigualdades resulta

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Teorema de Brooks

La acotación $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ en general no puede mejorarse, ya que para el grafo completo K_n el número cromático es n y el grado máximo $n - 1$, y se verifica la igualdad. También se da la igualdad para los ciclos de longitud impar, que tienen número cromático 3 y máximo grado 2. Brooks probó que en los grafos conexos éstos son los únicos casos en que se alcanza la igualdad, y por lo tanto:

Teorema (Brooks, 1941)

Si G es un grafo conexo que no sea completo ni un ciclo de longitud impar, entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Grafos planares

Más en general, todo grafo bipartito es 2-coloreable.

Para grafos planares se tiene el siguiente importante teorema:

Teorema de los cuatro colores (Appel & Haken, 1976)

Todo grafo planar es 4-colorable.

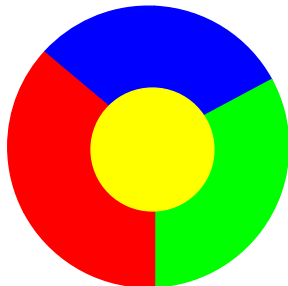
Además, si el grafo no contiene triángulos (es decir ciclos de longitud 3) se tiene lo siguiente:

Teorema (Grötzsch, 1959)

Todo grafo planar sin triángulos es 3-colorable.

Coloración de mapas

Los mapas se colorean de modo tal que países con un segmento de frontera común (un solo punto no cuenta) tengan colores diferentes. Aunque algunos mapas se pueden colorear con menos de 4 colores, algunos requieren cuatro colores, como muestra el siguiente mapa de un país rodeado por otros tres.

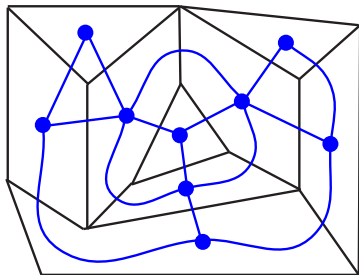


La Conjetura de los Cuatro Colores

En 1850 Francis Guthrie, luego de colorear el mapa de Inglaterra con cuatro colores, planteó el problema de si cuatro colores eran suficientes para colorear cualquier mapa. El problema fue propuesto a De Morgan, quien no pudo resolverlo. Algunos otros matemáticos prestigiosos lo intentaron sin éxito, hasta que en 1879 Kempe publicó una demostración que le dio mucha fama. Sin embargo 11 años después, en 1890, Heawood descubrió que la demostración de Kempe tenía un error. Heawood intentó corregir el error pero no tuvo éxito, sólo consiguió probar un resultado más débil, a saber, que cinco colores son suficientes (este resultado es el **teorema de los cinco colores**). Sin embargo, nadie pudo conseguir un mapa que no se pudiese colorear con cuatro colores.

Mapas y coloración por vértices

Colorear mapas equivale a colorear las caras de un grafo plano. Este problema a su vez equivale a uno de coloración por vértices, en un grafo en el cual las caras son vértices y dos vértices están unidos por una arista si y sólo si las caras correspondientes tienen un segmento de frontera común (un solo punto no cuenta). Este nuevo grafo también es planar.



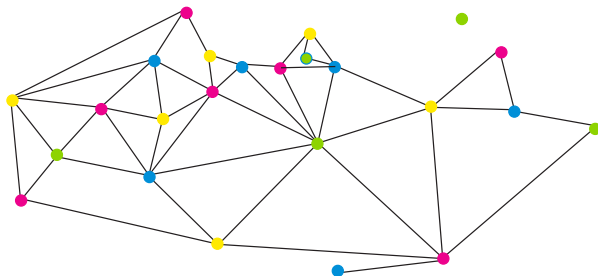
Mapa de los Estados de Venezuela



Grafo de caras acotadas



Coloración del grafo de Venezuela con 4 colores



Coloración del mapa de Venezuela con 4 colores



La prueba de Appel y Haken

La conjetura de los 4 colores equivale entonces a la afirmación de que todo grafo planar es 4-colorable por vértices. Este problema, que permaneció abierto más de un siglo desde que fuera planteado por Guthrie, fue resuelto en 1976 por K. Appel y W. Haken con ayuda de un complejo programa y 1200 horas de computador. Su método consistió en reducir el problema a un número finito (pero muy grande) de casos, los cuales analizaron con el computador.

Esto provocó muchas objeciones, porque por primera vez los matemáticos no podían verificar cada uno de los pasos de una demostración y tenían que confiar en la corrección del programa y en el funcionamiento correcto del computador. Luego de que se realizó la prueba en forma independiente, en otros computadores, con el mismo resultado, la confianza fue creciendo.

Polinomio cromático

Definición

Dado un grafo G y un número natural x , llamemos $P_G(x)$ al número de coloraciones por vértices de G con colores $\{1, 2, \dots, x\}$. A $P_G(x)$ se le llama **polinomio cromático** de G , ya que como veremos siempre es un polinomio en x .

Ejemplos

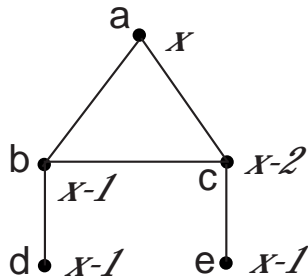
Para un grafo G de n vértices sin aristas se tiene $P_G(x) = x^n$.
Para un grafo completo $P_{K_n}(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.
Para un árbol G con n vértices se tiene $P_G(x) = x(x-1)^{n-1}$, ya que tomando un vértice como raíz y coloreándolo con cualquiera de los x colores disponibles, cada vértice restante se puede colorear con cualquiera de los $x-1$ colores diferentes al de su padre.

Polinomio cromático

Para hallar el polinomio cromático del grafo G de la figura comenzamos por asignar al vértice a uno cualquiera de los x colores disponibles. Ahora b se puede pintar con cualquiera de los $x - 1$ colores restantes; c sólo se puede pintar de $x - 2$ maneras, ya que no puede tener igual color que a ni que b ; d se puede pintar con cualquier color diferente al de b , es decir $x - 1$ posibilidades; e se puede pintar con cualquier color diferente al de c , es decir $x - 1$ posibilidades.

Por el principio del producto

$$P_G(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 1)(x - 1) = x(x - 1)^3(x - 2).$$



Polinomio cromático

Si $e = uv \in E$, recordemos que $G - e$ es el grafo que resulta al suprimir la arista e , y G/e es el grafo que resulta de la contracción de e a un punto.

Lema

Si $e \in E$ entonces $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x)$.

Demostración

Las coloraciones de $G - e$ con x colores son de dos tipos: (1) las que asignan colores diferentes a u y v , y (2) las que asignan el mismo color a u y a v . Las del tipo (1) son tantas como las coloraciones de G , es decir $P_G(x)$. Las del tipo (2) son tantas como las coloraciones de G/e , es decir $P_{G/e}$. Por lo tanto $P_{G-e}(x) = P_G(x) + P_{G/e}(x)$, de donde $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x)$.

Polinomio cromático

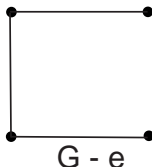
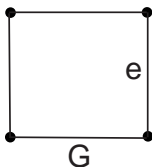
Ejemplo

Para hallar el polinomio cromático de $G = C_4$ sea e una de las aristas. Entonces $G - e$ es un camino, por lo tanto

$P_{G-e}(x) = x(x-1)^3$. G/e es un triángulo (K_3), por lo tanto

$P_{G/e}(x) = x(x-1)(x-2)$. Finalmente

$$P_G(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) = x(x-1)[(x-1)^2 - (x-2)] \\ = x(x-1)(x^2 - 2x + 1 - x + 2) = x(x-1)(x^2 - 3x + 3).$$



Polinomio cromático

Teorema

$P_G(x)$ es siempre un polinomio en x .

Demostración

Por inducción en el número m de aristas. Si $m = 0$ y el grafo G tiene n vértices entonces $P_G(x) = x^n$ es un polinomio. Si $m > 0$ y suponemos el resultado cierto para grafos con menos de m aristas, entonces sea e una arista de G . Por el lema anterior $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x)$. Pero $G - e$ y G/e tienen menos de m aristas, y entonces por la hipótesis inductiva $P_{G-e}(x)$ y $P_{G/e}(x)$ son polinomios en x , y también lo será su diferencia $P_G(x)$.

Coloración por aristas

Definición

Dado un conjunto de colores C , una **coloración por aristas** de un grafo $G = (V, E)$ es una función $f : E \rightarrow C$ tal que si $e, f \in E$ son aristas incidentes (es decir con un extremo común) entonces $f(u) \neq f(v)$.

En otras palabras, una coloración por aristas de un grafo es una asignación de colores a las aristas de manera tal que a cada par de aristas con un extremo común les correspondan colores diferentes.

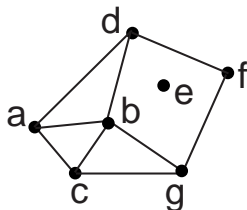
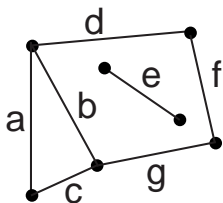
Muchos problemas de elaboración de horarios y planificación de tareas pueden modelarse como problemas de coloración de grafos por aristas.

Grafo de líneas

Definición

El **grafo de líneas** de un grafo $G = (V, E)$ es el grafo $L(G) = (E, F)$ que tiene como vértices a las aristas de G , y en el cual dos vértices son adyacentes si y sólo si, considerados como aristas de G , son incidentes.

La siguiente figura muestra un grafo G a la izquierda y a la derecha su correspondiente grafo de líneas $L(G)$.



Grafo k -colorable por aristas

Definición

Un grafo G es **k -colorable** por aristas si admite una coloración por aristas con k colores. Al menor k tal que G es k -colorable por aristas se le llama **índice cromático** de G y se denota $\chi'(G)$.

Obviamente $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Observe que a cada coloración por aristas de un grafo G le corresponde una coloración por vértices de su grafo de líneas $L(G)$, y recíprocamente. esto significa que el problema de colorear por aristas un grafo G es equivalente al de colorear por vértices su grafo de líneas $L(G)$. En particular $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Coloración por aristas

Ejemplo

Consideremos la tabla de horarios de un liceo. Se puede construir un multigrafo bipartito tomando como conjunto de vértices V_1 a los profesores, y como conjunto de vértices V_2 a los grupos. Por cada clase que un profesor debe dictar a un grupo durante la semana se traza una arista del profesor al grupo. Supongamos que cada clase dura una hora. Entonces tomemos como conjunto de colores las horas posibles (por ejemplo lunes de 8 a 9, martes de 11 a 12, etc.) A cada arista se le debe asignar un horario de modo tal que las que salen de un mismo profesor tengan horarios diferentes, y las que llegan a un mismo grupo también.

El **índice cromático** de este multigrafo representa la mínima longitud total de la tabla de horarios (es decir el menor número total de horas ocupadas en la semana).

Teoremas sobre el índice cromático

Como los grafos de líneas son un tipo especial de grafos, se sabe mucho más sobre $\chi'(G)$ que sobre $\chi(G)$.

Teorema (König, 1916)

Si G es un grafo bipartito entonces $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Teorema (Vizing, 1964)

Para todo grafo G se tiene

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Este teorema reduce a sólo **dos posibilidades** el valor del índice cromático: $\Delta(G)$ o $\Delta(G) + 1$.

Sumario

- Una **coloración por vértices** de un grafo G es una asignación de colores a los vértices de manera tal que a vértices adyacentes les correspondan colores diferentes. El menor número de colores para que esto sea posible es el **número cromático** $\chi(G)$. Se cumple $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Todo grafo planar es 4-colorable por vértices (teorema de los cuatro colores).
- Una **coloración por aristas** es una asignación de colores a las aristas de manera tal que aristas incidentes tengan colores diferentes. El menor número de colores para que esto sea posible es el **índice cromático** $\chi'(G)$. Se cumple $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ (teorema de Vizing).