

# Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto [jhnieto@yahoo.com](mailto:jhnieto@yahoo.com)

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad del Zulia

Julio 2005

# Página del curso

Una vez más les recuerdo que en mi página

<http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/>

se encuentran los materiales del curso, al igual que en la página del Departamento de Matemáticas

<http://www.demat.org.ve>

siguiendo el enlace **Curso Matemática Discreta**.

Allí además pueden registrarse y hacer consultas sobre los problemas, o ver las soluciones que se han publicado.

La última clase del curso, sobre coloración de grafos, será el próximo sábado 16/7/2005.

# Segundo examen parcial

El **2o. examen parcial** se realizará durante la semana del 11 al 15 de julio. Los temas para el 2o. parcial son:

Coeficientes multinomiales. Número de Funciones Sobreyectivas.

Principio de inclusiones y exclusiones.

Particiones de un conjunto. Permutaciones.

Números de Stirling.

Relaciones de recurrencia.

Funciones Generatrices.

El material correspondiente son las Conferencias #5, #6, #7 y #8 y las Hojas de Ejercicios #6, #7 y #8.

# Tercer examen parcial

El **3er examen parcial** se realizará durante la semana del 25 al 29 de julio. Los temas para el 3er examen parcial son:

Conjuntos parcialmente ordenados.  
Teoría de Grafos.

El material correspondiente son las Conferencias #9, #10, #11 y #12 y las Hojas de Ejercicios #9, #10 y #11.

# Esquema

- Conectividad
- Grafos Hamiltonianos
- Grafos planares

# Separación, puentes, vértices de corte

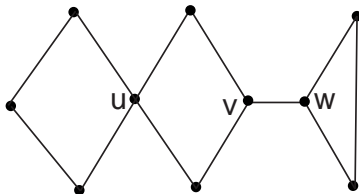
## Definición

Sean  $G = (V, E)$  un grafo,  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $V$  y  $X \subset V \cup E$ . Se dice que  $X$  **separa** a  $A$  y  $B$  si todo camino que tenga un extremo en  $A$  y el otro en  $B$  tiene un vértice o una arista en  $X$ . Un vértice que separa a otros dos vértices de su misma componente conexa se llama **vértice de corte**. Una arista que separa a sus extremos se llama **puente**.

Es fácil ver que una arista es un puente si y sólo si no pertenece a ningún ciclo.

# Ejemplo

En el grafo mostrado en la figura siguiente hay un solo puente (la arista  $vw$ ) y tres vértices de corte:  $u$ ,  $v$  y  $w$ .



# Conectividad

## Definición

Si  $k \geq 0$  es un entero, un grafo  $G = (V, E)$  se dice que es  **$k$ -conexo** si tiene más de  $k$  vértices y  $G - X$  es conexo para cualquier subconjunto de vértices  $X$  con  $|X| < k$ . Al mayor entero  $k$  tal que  $G = (V, E)$  es  $k$ -conexo se le llama **conectividad** de  $G$  y se denota  $\kappa(G)$ .

En otras palabras:  $G$  es  $k$ -conexo si  $|G| > k$  y se necesita remover al menos  $k$  vértices para desconectarlo. Observe que cualquier grafo (no vacío) es 0-conexo. Un grafo es 1-conexo si y sólo si tiene al menos dos vértices y es conexo.

# Conectividad

Observe que  $\kappa(G) = 0$  si y sólo si  $G$  no es conexo o  $G = K_1$ . Para los grafos completos se tiene  $\kappa(K_n) = n - 1$ . Los ciclos  $C_n$  tienen conectividad 2.

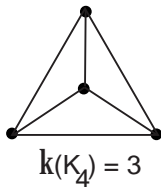
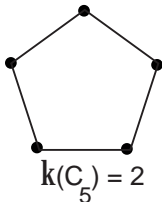
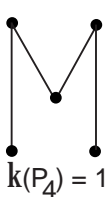
## Ejemplo

En una red de computadoras, si los equipos (computadoras, enrutadores, puentes, etc.) se consideran como vértices y los cables como aristas, que el grafo resultante tenga conectividad  $k$  significa que hasta  $k - 1$  equipos pueden dejar de funcionar sin que los demás dejen de estar conectados entre sí.

# Ejemplo

## Ejemplo

En la siguiente figura se muestran tres grafos: el camino  $P_4$  que tiene conectividad 1, el ciclo  $C_5$  que tiene conectividad 2, y  $K_4$  que tiene conectividad 3.



# Conectividad por aristas

Hay un concepto de conectividad análogo sustituyendo vértices por aristas.

## Definición

Si  $k \geq 0$  es un entero, Un grafo  $G = (V, E)$  es  **$k$ -conexo por aristas** si tiene más de un vértice y  $G - F$  es conexo para cualquier subconjunto de aristas  $F$  con  $|F| < k$ . Al mayor entero  $k$  tal que  $G = (V, E)$  es  $k$ -conexo por aristas se le llama **conectividad por aristas** de  $G$  y se denota  $\lambda(G)$ .

La conectividad por aristas de un grafo no conexo es 0. Se puede probar que en general se tiene:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

# Grafos Hamiltonianos

## Definiciones

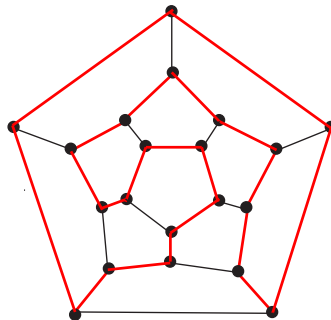
Un **ciclo hamiltoniano** en un grafo es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo. Un grafo es **hamiltoniano** si contiene un ciclo hamiltoniano. Un **camino hamiltoniano** es un camino que contiene a todos los vértices.

## Ejemplo

Observe que un ciclo hamiltoniano debe contener todos los vértices, pero no necesariamente todas las aristas. Los ciclos  $C_n$  son ejemplos triviales de grafos hamiltonianos. Un ejemplo menos trivial es el grafo formado por los vértices y aristas de un cubo. Si  $n \geq 3$  el grafo completo  $K_n$  es hamiltoniano. De hecho, cualquier permutación de los vértices de  $K_n$  da lugar a un ciclo hamiltoniano. El número de ciclos hamiltonianos en  $K_n$  es entonces  $(n - 1)!/2$ .

# Grafos Hamiltonianos

El nombre de estos grafos proviene de William Rowan Hamilton (1805–1865), matemático irlandés que creó un rompecabezas basado en el dodecaedro llamado “Juego Icosiano”. Entre otras cosas, en este juego había que hallar un ciclo que pasara por todos los vértices del dodecaedro. El acertijo se facilita si se representa el grafo del dodecaedro en el plano, como en la figura a la derecha.



# Teorema de Ore

A diferencia de lo que ocurre con los grafos eulerianos, no se conoce una condición necesaria y suficiente, sencilla y útil, para que un grafo sea hamiltoniano. Una obvia condición necesaria es  $\delta(G) \geq 2$ , pero no es suficiente. Tampoco es suficiente una condición del tipo  $\delta(G) \geq k$ , con  $k$  constante. Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

## Teorema (Ore, 1960)

*Si un grafo tiene  $n \geq 3$  vértices y la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es mayor o igual que  $n$ , entonces el grafo es hamiltoniano.*

# Teorema de Ore

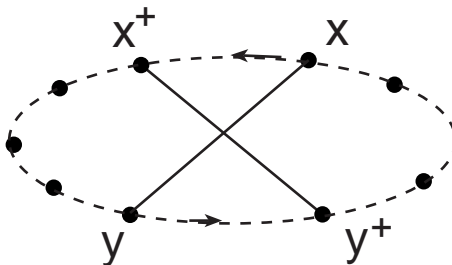
## Demostración

Consideremos el grafo completo  $K$  con el mismo conjunto de vértices que  $G$ . De todos los ciclos hamiltonianos en  $K$  tomemos uno  $C$  que tenga el mayor número posible de aristas en  $G$ . Si  $x$  es un vértice de  $C$ , llamemos  $x^+$  a su sucesor en el ciclo. Probaremos que  $C$  tiene todas sus aristas en  $G$ . Para ello supongamos por absurdo que una arista  $xx^+$  no pertenezca a  $G$ . Sea  $S$  el conjunto de todos los vértices de  $G$  adyacentes a  $x$ . Sea  $S^+ = \{y^+ : y \in S\}$ . Es claro que  $|S^+| = |S| = g(x)$ . Afirmamos que  $x^+$  es adyacente a algún  $y^+ \in S^+$ . En efecto, si no fuese así, como  $x^+ \notin S^+$ , los vértices adyacentes a  $x^+$  estarían contenidos en  $V(G) \setminus (S^+ \cup \{x^+\})$  y por lo tanto  $g(x^+) \leq n - |S^+| - 1 = n - g(x) - 1$ , de donde  $g(x^+) + g(x) \leq n - 1 < n$ , contradiciendo la hipótesis.

# Teorema de Ore

## Demostración (cont.)

Por lo tanto existe  $y^+ \in S^+$  adyacente a  $x^+$ . Pero esto nos permite cambiar las aristas  $xx^+$  y  $yy^+$  de  $C$  por las aristas  $xy$  y  $x^+y^+$  (ver figura) obteniendo un nuevo ciclo hamiltoniano  $C'$  en  $K$  que tiene al menos una arista más en  $G$  que  $C$ , lo cual es absurdo.



# Teorema de Dirac

## Teorema (Dirac, 1952)

*Si  $G = (V, E)$  es un grafo de orden  $n \geq 3$  y grado mínimo  $\delta(G) \geq n/2$ , entonces es hamiltoniano.*

## Demostración.

Es un corolario inmediato del Teorema de Ore. En efecto, si  $u$  y  $v$  son vértices no adyacentes de  $G$  entonces  $g(u) + g(v) \geq \delta(G) + \delta(G) \geq n/2 + n/2$ , y por el teorema de Ore  $G$  es hamiltoniano. □

# Representaciones y Grafos Planos

## Definición

Una **representación** de un grafo  $G = (V, E)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  es una correspondencia que a cada vértice  $v \in V$  le asocia un punto  $P_v \in \mathbb{R}^2$  y a cada arista  $e \in E$  con extremos  $u$  y  $v$  le hace corresponder una curva continua y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^2$  (es decir una función continua e inyectiva de un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$ ) que tenga como extremos a  $P_u$  y  $P_v$ . A estas curvas les llamaremos **líneas** de la representación.

Todas las figuras de grafos que hemos visto hasta ahora son en realidad representaciones planas.

## Definición

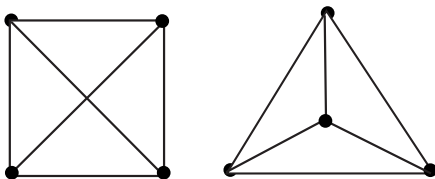
Un **grafo plano** es una representación plana tal que si dos líneas se intersectan, lo hacen en un extremo común a ambas.

# Grafos planares

## Definición

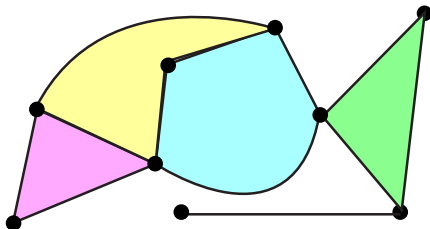
Un grafo es **planar** si puede ser representado como un grafo plano.

La figura siguiente muestra dos representaciones de  $K_4$ . En la de la izquierda hay dos líneas que se cruzan, por lo tanto no es un grafo plano. La representación de la derecha sí es un grafo plano. Por lo tanto  $K_4$  es planar.



# Caras de un grafo plano

Las líneas de un grafo plano dividen al plano en regiones abiertas y disjuntas que se llaman **caras**, y son las componentes conexas del complemento en  $\mathbb{R}^2$  de la unión de todas las líneas y puntos del grafo. Como los grafos planos son acotados (porque cada línea lo es), todas sus caras son acotadas excepto una de ellas. Por ejemplo en la figura siguiente se muestra un grafo plano con 5 caras, 4 acotadas (en colores) y una no acotada (la cara blanca exterior).



# Teorema de Euler

## Teorema (Euler)

*Si un grafo plano conexo tiene  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras, entonces*

$$V - A + C = 2.$$

*Esta relación vale también para los vértices, aristas y caras de los poliedros convexos.*

## Ejemplo

En el grafo de la figura anterior se tiene  $V = 9$ ,  $A = 12$ ,  $C = 5$  y  $V - A + C = 9 - 12 + 5 = 2$ .

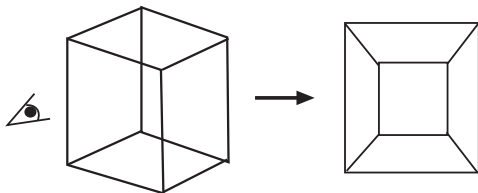
Un cubo tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras, por lo tanto  $V - A + C = 8 - 12 + 6 = 2$ . El dodecaedro regular tiene 20 vértices, 30 aristas y 12 caras, y también  $V - A + C = 20 - 30 + 12 = 2$ .

# Demostración

Para un número de vértices  $V$  fijo, procedamos por inducción en el número de aristas. El paso base es  $A = V - 1$ , en cuyo caso el grafo es un árbol. Entonces no contiene ciclos, no hay ninguna cara acotada y por lo tanto  $C = 1$  (la única cara es la región no acotada). Entonces  $V - A + C = V - (V - 1) + 1 = 2$ . Supongamos ahora que  $G$  tiene  $A > V - 1$  aristas y que el resultado es cierto para grafos planos conexos con  $V$  vértices y menos de  $A$  aristas. Sea  $e$  una arista perteneciente a un ciclo. Entonces el grafo  $G' = G - e$  tiene  $V' = V$  vértices,  $A' = A - 1$  aristas y su número de caras es  $C' = C - 1$ , ya que al quitar  $e$  hay dos caras de  $G$  que se conectan y pasan a ser una sola. Por lo tanto  $V - A + C = V' - A' + C'$ , pero por la hipótesis inductiva  $V' - A' + C' = 2$ .

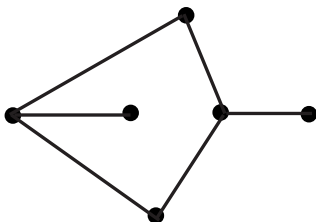
# Poliedros convexos

Este teorema se aplica a los poliedros convexos, ya que el grafo formado por los vértices y aristas de estos objetos siempre es plano. En efecto, si imaginamos el poliedro transparente y nos acercamos lo suficiente a una de las caras desde afuera, entonces veremos el borde de esa cara y todas las aristas restantes del poliedro dentro de ella, formando un grafo plano (más formalmente, lo que se hace es proyectar el poliedro desde un punto exterior a una cara y suficientemente cercano a ella, sobre el plano de la cara).



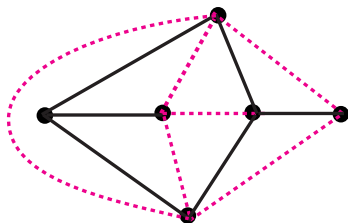
# Triangulaciones

Una **triangulación** es un grafo plano en el cual todas las caras (incluso la no acotada) tiene una frontera triangular (es decir, un ciclo de longitud tres como borde). Es fácil ver que cualquier grafo plano con 3 o más vértices puede convertirse en una triangulación añadiendo un número conveniente de aristas. En la figura siguiente se muestra un grafo plano con 5 aristas (en trazo negro continuo) que se convierte en una triangulación al agregarle 6 aristas (en trazo rojo punteado).



# Triangulaciones

Una **triangulación** es un grafo plano en el cual todas las caras (incluso la no acotada) tiene una frontera triangular (es decir, un ciclo de longitud tres como borde). Es fácil ver que cualquier grafo plano con 3 o más vértices puede convertirse en una triangulación añadiendo un número conveniente de aristas. En la figura siguiente se muestra un grafo plano con 5 aristas (en trazo negro continuo) que se convierte en una triangulación al agregarle 6 aristas (en trazo rojo punteado).



## Teorema

*Una triangulación plana con  $n$  vértices tiene  $3n - 6$  aristas. Un grafo plano con  $n \geq 3$  vértices tiene a lo sumo  $3n - 6$  aristas.*

## Demostración.

Como en una triangulación cada cara tiene 3 aristas como frontera, y cada arista es borde de dos caras, se cumple que  $3C = 2A$ . Pero por el teorema ?? se tiene  $V - A + C = 2$ , y multiplicando por 3 resulta  $3V - 3A + 3C = 6$ , de donde  $A = A + (2A - 3C) = 3V - 6$ . Como cualquier grafo plano con  $n \geq 3$  vértices puede convertirse en una triangulación agregando aristas, la segunda afirmación del teorema es consecuencia de la primera. □

## Teorema

$K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares.

## Demostración.

Por el teorema anterior un grafo planar con 5 vértices puede tener como máximo  $3 \cdot 5 - 6 = 9$  aristas, pero  $K_5$  tiene  $\binom{5}{2} = 10$ , por lo tanto no es planar.

El caso de  $K_{3,3}$  es más difícil, ya que tiene 6 vértices y 9 aristas, y  $3 \cdot 6 - 6 = 12 \geq 9$ . Sin embargo  $K_{3,3}$  no contiene ningún triángulo, por lo cual, si pudiese representarse como un grafo plano, éste tendría cada cara limitada por un ciclo de longitud al menos 4. Por lo tanto  $2A \geq 4C$ , y combinando esto con  $V - A + C = 2$  resulta

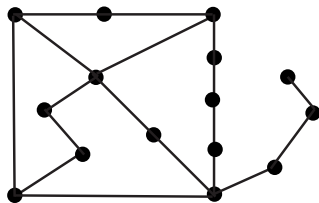
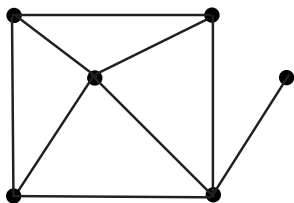
$A \leq A + (A - 2C) = 2(A - C) = 2(V - 2)$ . Pero esto es imposible para  $K_{3,3}$  pues  $9 > 8$ . □

# Subdivisión de un grafo

## Definición

Una **subdivisión** de un grafo  $G = (V, E)$  es cualquier grafo obtenido a partir de  $G$  sustituyendo algunas aristas  $uv$  por caminos de  $u$  a  $v$  (con vértices interiores no pertenecientes a  $V$ ).

Intuitivamente, una subdivisión de un grafo se obtiene agregando vértices en las aristas del grafo original, como se ve en la figura:



# Teorema de Kuratowski

Obviamente  $K_n$  no es planar si  $n \geq 5$ , y  $K_{m,n}$  no es planar si  $m \geq 3$  y  $n \geq 3$ . En cambio es fácil ver que si  $m \leq 2$  o  $n \leq 2$  entonces  $K_{m,n}$  es planar.

Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  contienen, por así decirlo, la semilla de la no planaridad, como muestra el siguiente resultado (cuya demostración excede los límites de este curso):

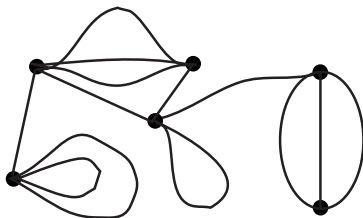
## Teorema (Kuratowski, 1930)

*Un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafo a una subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .*

# Extensiones del concepto de grafo

El concepto de grafo simple admite varias generalizaciones. Una de ellas consiste en admitir aristas que tienen un solo extremo. Este tipo de aristas se llaman **bucles** o **lazos**, y se pueden visualizar como líneas que parten de un vértice y vuelven a él.

Otra generalización consiste en admitir más de una arista con los mismos extremos. Este tipo de grafos se denomina **multigrafo**.



Una manera de formalizar estas ideas es definir un multigrafo como una terna  $G = (V, E, \psi)$  donde  $V$  es el conjunto de vértices,  $E$  es el conjunto de aristas y  $\psi : E \rightarrow P(V)$  es una función, siendo  $P(V) = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$  el conjunto de todos los pares no ordenados de elementos (diferentes o no) de  $V$ . La función  $\psi$  se llama *función de incidencia*. Para cada arista  $e \in E$ ,  $\psi(e)$  contiene los extremos de  $e$ . Si  $|\psi(e)| = 1$  entonces  $e$  es un bucle, de lo contrario  $|\psi(e)| = 2$ .

Muchos de los conceptos que hemos visto para grafos se pueden aplicar a los multigrafos, pero en algunos casos hay que hacer adaptaciones más o menos obvias. Por ejemplo al definir el grado de un vértice, se considera que cada bucle aporta dos unidades al grado de su único extremo. De esta manera el teorema de Euler sobre la suma de los grados es válido también para multigrafos.

# Digrafos

Otra generalización del concepto de grafo es la siguiente:

## Definición

Un **grafo dirigido** o **digrafo** es una cuaterna  $G = (V, E, \phi, \psi)$  donde  $V$  es un conjunto de elementos llamados **vértices**,  $E$  es un conjunto de elementos llamados **arcos**, y  $\phi$  y  $\psi$  son dos funciones de  $E$  en  $V$ . Para cada  $e \in E$ , a  $\phi(e)$  se le llama **origen** y a  $\psi(e)$  se le llama **extremo** de  $e$ .

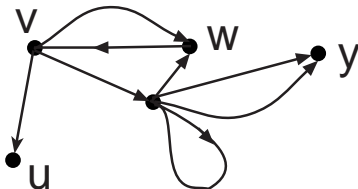
Obsérvese que un digrafo es como un multigrafo en el cual a cada arista se le ha asignado un **sentido**.

Los digrafos se representan dibujando, para cada vértice  $v$ , un punto  $P_v$ , y para cada arco de origen  $v$  y extremo  $w$ , una flecha (segmento dirigido) desde  $P_v$  hasta  $P_w$ .

# Digrafos

## Ejemplo

En la figura se representa un digrafo con 5 vértices y 8 arcos, uno de los cuales es un bucle con origen y extremo  $x$ . Observe que un arco va de  $v$  a  $w$  y otro en el sentido opuesto, de  $w$  a  $v$ . También hay dos arcos *paralelos* de  $x$  a  $y$ .



# Digrafos

Todo digrafo tiene un grafo (o multigrafo) subyacente, que se obtiene olvidando el sentido de los arcos y considerándolos como aristas no orientadas. De esta manera muchos conceptos de la teoría de grafos se pueden aplicar a los digrafos, como por ejemplo las nociones de grado, camino, grafo conexo, etc. Otras definiciones se adaptan de manera más o menos obvia, por ejemplo se pueden definir sub-digrafos, isomorfismo de digrafos, etc.

## Definición

El **grado saliente**  $g^+(v)$  de  $v \in V$  es el número de arcos que tienen a  $v$  como origen, y su **grado entrante**  $g^-(v)$  es el número de arcos que lo tienen como extremo.

# Digrafos

## Grado entrante y saliente

Obviamente

$$g(v) = g^+(v) + g^-(v).$$

El teorema de Euler sobre la suma de los grados toma ahora la siguiente forma:

$$\sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v) = |E|.$$

# Digrafos

Una **caminata dirigida** en un digrafo  $G = (V, E, \phi, \psi)$  es una sucesión alternada de vértices y arcos  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k$ , tal que  $\phi(e_i) = v_i$  y  $\psi(e_i) = v_{i+1}$  para  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Si  $v_0 = v_k$  la caminata se dice cerrada, de lo contrario se dice que es una caminata abierta de  $v_0$  a  $v_k$ . Un **camino dirigido** es una caminata dirigida con todos sus vértices diferentes.

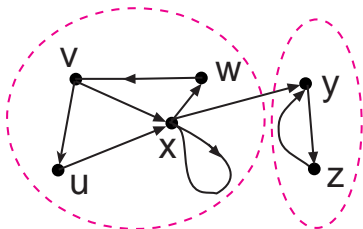
## Definición

Un digrafo es **fuertemente conexo** si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  existe una caminata dirigida de  $u$  a  $v$  y otra de  $v$  a  $u$ . Los sub-digrafos fuertemente conexos maximales de un digrafo  $G = (V, E, \phi, \psi)$  se llaman **componentes fuertemente conexas**.

# Componentes fuertemente conexas

## Ejemplo

El digrafo de la figura no es fuertemente conexo ya que por ejemplo no hay forma de ir desde  $y$  a  $x$ . Tiene dos componentes fuertemente conexas, una es  $G[\{u, v, w, x\}]$  y la otra  $G[\{y, z\}]$ .



# Sumario

- Un grafo  $G$  es  **$k$ -conexo** si  $|G| > k$  y se necesita remover al menos  $k$  vértices para desconectarlo.
- Un grafo es **hamiltoniano** si contiene un ciclo que pasa por todos sus vértices.
- Si un grafo tiene  $n \geq 3$  vértices y la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es mayor o igual que  $n$ , entonces el grafo es hamiltoniano.
- Si un grafo plano conexo tiene  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras, entonces  $V - A + C = 2$ . Esto vale también para los poliedros convexos.
- $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares. Más aún, un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafo a una subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .