Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
jhnieto@yahoo.com

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

Abril 2005

Introducción

Los grafos son estructuras discretas compuestas por puntos (llamados vértices) y líneas (llamadas aristas) que conectan algunos pares de esos puntos.
Son una abstracción útil para modelar diversas situaciones tales como:

- redes de computadoras,
- estructuras de datos
- redes telefónicas o eléctricas,
- circuitos eléctricos,
- sistemas de carreteras,
- sistemas de distribución de mercancías,
- sistemas de toma de decisiones, etc.

Grafos

Definiciones básicas

Un grafo simple es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados *vértices* y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V llamados *aristas*.

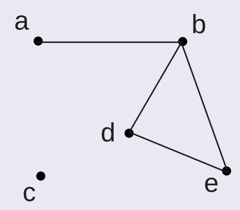
Si $e = \{u, v\}$ es una arista entonces se dice que los vértices u y v son los extremos de e.

Un vértice y una arista son incidentes si el vértice es uno de los extremos de la arista.

Dos vértices u y v son adyacentes si $\{u, v\}$ es una aristas.

Representación

Un grafo se representa por medio de puntos o pequeños círculos, que designan vértices, y líneas que los unen, que representan las aristas. Por ejemplo si $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{d, e\}\}$ entonces (V, E) es un grafo con cinco vértices a, b, c, d y e y cuatro aristas, y la siguiente figura es su representación gráfica:



Grado

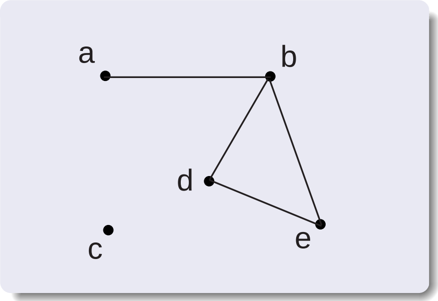
Definición

El grado de un vértice v de un grafo es el número $g(v)$ de aristas incidentes con él. Si $g(v) = 0$ se dice que v es un vértice aislado.

Definición

La sucesión de grados de un grafo se obtiene ordenando en forma no decreciente los grados de todos los vértices.

Ejemplo



En este grafo se tiene $g(a) = 1$, $g(b) = 3$, $g(d) = g(e) = 2$ y $g(c) = 0$ (c es un vértice aislado).
La sucesión de grados es 0, 1, 2, 2, 3.

Teorema de Euler

Teorema

En todo grafo $G = (V, E)$ se cumple

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|.$$

Demostración.

Las aristas se pueden contar viendo cuántas son incidentes con cada vértice y sumando todos los números obtenidos. Pero así cada arista resulta contada dos veces, una por cada uno de sus extremos. $\square$

Ejemplos

Ejemplo

Si un grafo tiene sucesión de grados 0, 1, 1, 2, 3, 3, ¿cuántas aristas tiene?

Respuesta: $(0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3)/2 = 5$.

Ejemplo

¿Existe algún grafo cuya sucesión de grados sea 1, 1, 2, 3, 4?

Respuesta: No, porque $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$ es impar.

Ejemplos

Ejemplo

Si un grafo tiene sucesión de grados 0, 1, 1, 2, 3, 3, ¿cuántas aristas tiene?

Respuesta: $(0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3)/2 = 5$.

Ejemplo

¿Existe algún grafo cuya sucesión de grados sea 1, 1, 2, 3, 4?

Respuesta: No, porque $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$ es impar.

Ejemplos

Ejemplo

Si un grafo tiene sucesión de grados 0, 1, 1, 2, 3, 3, ¿cuántas aristas tiene?

Respuesta: $(0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3)/2 = 5$.

Ejemplo

¿Existe algún grafo cuya sucesión de grados sea 1, 1, 2, 3, 4?

Respuesta: No, porque $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$ es impar.

Ejemplos

Ejemplo

Si un grafo tiene sucesión de grados 0, 1, 1, 2, 3, 3, ¿cuántas aristas tiene?

Respuesta: $(0+1+1+2+3+3)/2 = 5$.

Ejemplo

¿Existe algún grafo cuya sucesión de grados sea 1, 1, 2, 3, 4?

Respuesta: No, porque $1+1+2+3+4 = 11$ es impar.

Isomorfismo

Definición

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son isomorfos si existe una biyección $f : V \to V'$ que preserva la relación de adyacencia, es decir tal que

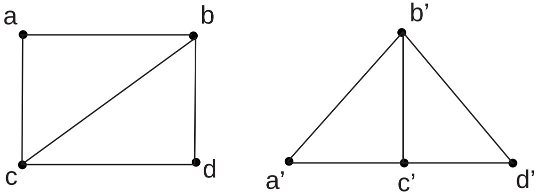
$$\{u, v\} \in E \quad \text{si y sólo si} \quad \{f(u), f(v)\} \in E'$$

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices. Más aún todas las propiedades que se deriven de la relación de adyacencia deben ser idénticas en ambos, en particular deben tener el mismo número de aristas y sucesiones de grados idénticas. Para los fines de la teoría de grafos, dos grafos isomorfos se consideran idénticos.

Isomorfismo

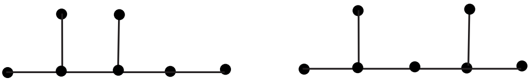
Ejemplo

Los dos grafos representados en la siguiente figura son isomorfos, ya que la función f que lleva a en a', b en b', c en c' y d en d' es una biyección y preserva la adyacencia.



Isomorfismo

Dos grafos con idénticas sucesiones de grados tienen el mismo número de vértices y de aristas, pero esto no es suficiente para que los grafos sean isomorfos, como muestran los dos grafos diguientes:

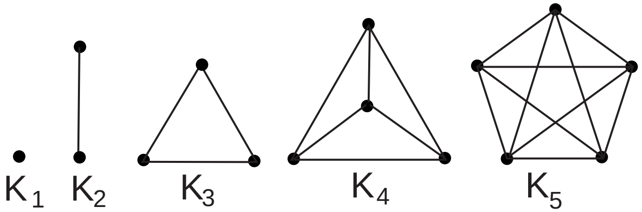


Ambos tienen sucesión de grados 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, pero no son isomorfos ya que en el de la izquierda el único vértice de grado 2 es adyacente a un vértice de grado 1 y a otro de grado 3, mientras que en el grafo de la derecha el único vértice de grado 2 es adyacente a dos vértices de grado 3.

Grafos completos

Definición

Se llama grafo completo en n vértices, y se denota K_n, a un grafo con n vértices v_1, $v_2, \ldots, v_n$ cuyas aristas son todos los pares $\{v_1, v_j\}$ con $1 \leq i < j \leq n$. El número de aristas de K_n es $n(n-1)/2$.

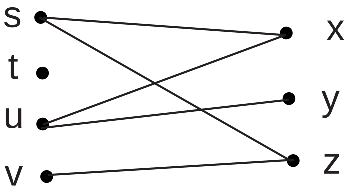


Grafos Bipartitos

Definición

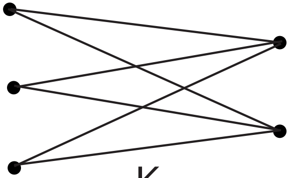
Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es bipartito si el conjunto de vértices V puede particionarse en dos subconjuntos V_1 y V_2 tales que todas las aristas tengan un extremo en V_1 y el otro en V_2.

En la figura se representa un grafo bipartito con $V_1 = \{s, t, u, v\}$ y $V_2 = \{x, y, z\}$.



Grafos Bipartitos Completos

Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito con $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $|V_1| = m$, $|V_2 1 = n$ y $E = V_1 \times V_2$ (es decir, si (u, v) es una arista para todo par de vértices $u \in V_1$, $v \in V_2$) entonces se dice que G es un *grafo bipartito completo* y se denota $K_{m,n}$. La siguiente figura se representa $K_{3,2}$.



$K_{3,2}$

Caminos y ciclos

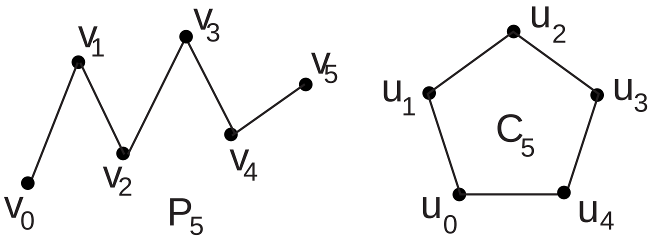
Definición

Un camino de longitud n es un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. Un camino se representa dando la sucesión $v_0v_1 \ldots v_n$ de sus vértices, entendiendo que las aristas son v_0v_1, v_1v_2,$\ldots$, $v_{n-1}v_n$. A v_0 y v_n se les llama extremos del camino.
Un ciclo de longitud n es un grafo $G = (V, E)$ de orden $n \geq 3$, con vértices v_0, v_1, $\ldots$, v_{n-1} y aristas v_0v_1, v_1v_2,$\ldots$, $v_{n-2}v_{n-1}$ y $v_{n-1}v_0$.

Todos los caminos de longitud n son isomorfos, y se les denota P_n. El camino de longitud 0, P_0, consta de un solo vértice y ninguna arista. Todos los ciclos de longitud n son isomorfos, y se les denota C_n.

Caminos y ciclos

En la figura siguiente se representan P_5 y C_5.

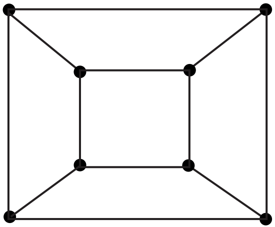


Grafos regulares

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si el grado común es k se dice que el grafo es k-regular. A los grafos 3-regulares se les llama también grafos cúbicos.

La siguiente figura muestra un grafo cúbico de 8 vértices (precisamente el formado por los vértices y aristas de un cubo).



Subgrafos

Definición

Si $G = (V, E)$ y $H = (W, F)$ son grafos tales que $W \subset V$ y $F \subset E$, entonces se dice que H es un subgrafo de G y que G es un supergrafo de H. Si $G = (V, E)$ es un grafo y $W \subset V$, se llama subgrafo inducido (o generado) por W al grafo $G[W] = (W, F)$ con $F = (W \times W) \cap E$. En palabras, el subgrafo de G inducido por W, denotado $G[W]$, es el grafo que tiene a W como conjunto de vértices y como aristas a todas las aristas de G que tengan ambos extremos en W.

Ejemplo

Sea $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, ac, bc, ad, de\})$. Entonces $H = (\{a, b, c\}, \{ac, bc\})$ es un subgrafo de G. El subgrafo de G inducido por $\{a, b, c\}$ es $(\{a, b, c\}, \{ab, ac, bc\})$.

Distancia y diámetro

Un camino en un grafo G es simplemente un subgrafo de G que, considerado como grafo, sea un camino.

Definición

La distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v de un grafo es la longitud del camino más corto de u a v. Si no existe ningún camino de u a v se pone $d(u, v) = \infty$.
El diámetro de G es la máxima distancia entre dos vértices de G y se denota $\mathrm{diam}(G)$.
Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si para cualquier par de vértices $u, v \in V$ existe un camino en G que los une, es decir un camino con extremos u y v. Equivalentemente, G es conexo si $\mathrm{diam}(G) < \infty$.

Distancia y diámetro

Proposición

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $\delta(G)$ el mínimo de los grados de sus vértices. Entonces $\operatorname{diam}(G) \geq \delta(G)$.

Demostración.

Sea $k = \operatorname{diam}(G)$ y sea $v_0 v_1 \ldots v_k$ un camino de longitud k. Entonces todos los vértices adyacentes a v_k deben pertenecer al camino, pues de lo contrario éste se podría extender y el diámetro de G sería mayor que k. Por lo tanto
$\delta(G) \leq g(v_k) \leq k = \operatorname{diam}(G)$. □

Cintura y circunferencia

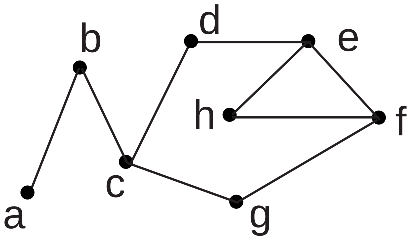
Un ciclo en un grafo G es un subgrafo de G que sea él mismo un ciclo. Un ciclo se representa dando la sucesión $v_0 v_1 \dots v_{n-1}$ de los vértices que lo componen, entendiendo que sus aristas son $v_0 v_1$, $v_1 v_2$,..., $v_{n-2} v_{n-1}$ y $v_{n-1} v_0$.

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es acíclico si no contiene ningún ciclo. La cintura de un grafo es la longitud del ciclo más corto que contiene, y su circunferencia es la longitud del ciclo más largo. Si el grafo es acíclico, por convención su cintura es ∞ y su circunferencia es 0.

Ejemplo

El grafo de la figura siguiente es conexo. Por ejemplo dados los vértices *b* y *h*, un camino que los une es el *bcdeh* (hay otros dos: el *bcgfh* y el *bcgfeh*). La mayor distancia entre dos vértices es $d(a, h) = 5$, por lo tanto el diámetro de este grafo es 5. Este grafo contiene tres ciclos: *cdefg*, *hef* y *cdehfg*. Por lo tanto su cintura es 3 y su circunferencia es 6.



Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si $\delta(G) \geq 2$ entonces G contiene un ciclo de longitud mayor que $\delta(G)$.

Demostración.

Sea $v_0 v_1 \ldots v_k$ un camino de longitud máxima en G. Como $g(v_k) \geq 2$, v_k debe ser adyacente a algún vértice $u \neq v_{k-1}$, que debe pertenecer al camino pues de lo contrario éste se podría extender. Sea v_i el vértice con menor índice que sea adyacente a v_k. Entonces $v_i v_{i+1} \ldots v_k$ es un ciclo y como todos los vértices adyacentes a v_k deben pertenecer a este ciclo se deduce que su longitud es al menos $\delta(G) + 1$. $\square$

Operaciones con grafos

Hay varias operaciones conjuntistas que pueden realizarse con grafos. La siguiente definición reúne las más comunes.

Definición

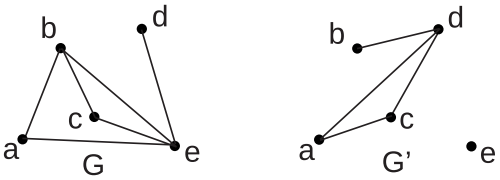
La *unión* de dos grafos $G = (V, E)$ y $H = (W, F)$ es el grafo $G \cup H = (V \cup W, E \cup F)$, y su *intersección* es el grafo $G \cap H = (V \cap W, E \cap F)$.
El *complemento* de $G = (V, E)$ es $G' = (V, E')$, donde E' es el conjunto de todos los pares de elementos de V que no están en E. En otras palabras G' tiene el mismo conjunto de vértices que G, pero dos vértices son adyacentes en G' si y sólo si no lo son en G.

Definición

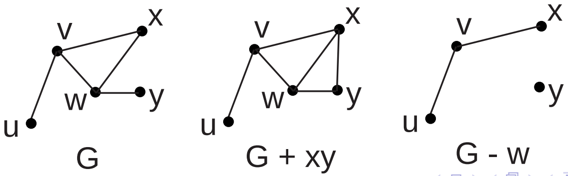
Si $G = (V, E)$ es un grafo y $F \subset V \times V$, entonces $G + F = (V, E \cup F)$ y $G - F = (V, E \setminus F)$. En particular si $e \in V \times V$ usaremos la notación $G + e$ en vez de $G + \{e\} = (V, E \cup \{e\})$, y $G - e$ en vez de $G - \{e\} = (V, E \setminus \{e\})$.
Análogamente Si W es un conjunto de vértices entonces $G + W = (V \cup W, E)$. Algo más complicada es la definición de $G - W$, pues si se suprime un vértice hay que suprimir también todas las aristas incidentes con él. Entonces $G - W = (V \setminus W, E')$, donde E' es el conjunto de aristas en E que no son incidentes con ningún vértice en W. Si $W = \{x\}$ se utilizan las notaciones abreviadas $G + x$ en vez de $G + \{x\}$ y $G - x$ en vez de $G - \{x\}$.

Ejemplos

La siguiente figura muestra un grafo G y su complemento G'.



La figura siguiente muestra un grafo G, el resultado de adicionarle una arista y el de suprimir un vértice.

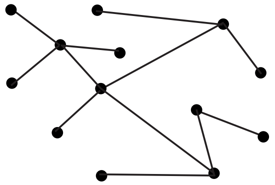


Árboles

Definición

Un árbol es un grafo conexo y acíclico.

En la figura siguiente se representa un árbol con 13 vértices y 12 aristas.



Árboles

Teorema

Un árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas.

Demostración.

Por inducción en n. Si $n = 1$ se cumple pues no hay aristas. Si $n > 1$ y G es un grafo acíclico y conexo con n vértices y m aristas, G debe contener al menos un vértice v de grado 1 (pues si $\delta(G) \geq 2$ entonces G contendría un ciclo). Entonces $G - v$ tiene $n-1$ vértices y $m-1$ aristas, y obviamente es acíclico y conexo. Por la hipótesis inductiva debe ser $m - 1 = (n-1) - 1$, de donde $m = n - 1$. □

Árboles

Teorema

Se $G = (V, E)$ un grafo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(a) *G es un árbol.*

(b) *Dos vértices cualesquiera de G están unidos por un único camino.*

(c) *G es conexo pero si se le quita cualquier arista deja de serlo.*

(d) *G es acíclico pero si se le agrega una arista cualquiera deja de serlo.*

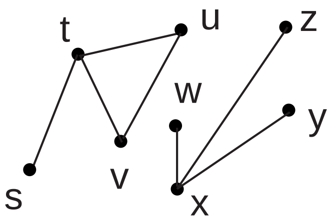
La prueba se deja como ejercicio.

Componentes conexas

Definición

Una componente conexa de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G, es decir un subgrafo conexo que no está propiamente contenido en ningún otro subgrafo conexo de G.

El grafo de la figura siguiente tiene dos componentes conexas.



Bosques

Las componentes conexas de un grafo son disjuntas, y el grafo es la unión de ellas. Si un grafo es acíclico entonces cada una de sus componentes conexas es un árbol. por ello a los grafos acíclicos se les llama bosques.

Teorema

Si un grafo acíclico G tiene n vértices y k componentes conexas, entonces tiene $n-k$ aristas.

Demostración.

Cada componente conexa de G es un árbol. Por lo tanto si la i-sima componente tiene n_i vértices, debe tener $n_i - 1$ aristas. Entonces el número de aristas de G es

$$(n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k.$$

□

Aplicación

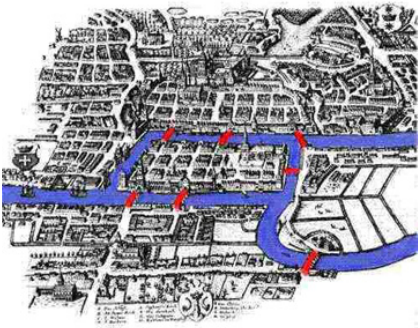
Un algoritmo halla el mínimo de n números diferentes a_1, a_2,...,a_n, efectuando comparaciones del tipo $a_i < a_j$. ¿Cuántas comparaciones debe realizar como mínimo?

Solución.

Consideremos los números a_1, a_2,...,a_n como los vértices de un grtafo, y ejecutemos el algoritmo. Unamos a_i con a_j mediante una línea si y sólo si el algoritmo comparó a_i con a_j. El grafo resultante debe ser conexo, ya que de lo contrario no habría manera de saber cuál de dos números pertenecientes a componentes conexas diferentes es el más grande. Por lo tanto debe tener al menos $n-1$ aristas, es decir que un algoritmo que determine el mínimo debe hacer al menos $n-1$ comparaciones. $\square$

Grafos Eulerianos

La ciudad de Konigsberg, capital de Prusia oriental en el siglo XVIII, era atravesada por el río Pregel, sobre el cual había siete puentes. Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar a la casa, habiendo pasado una y sólo una vez por cada puente.



Grafos Eulerianos

El problema anterior fue resuelto por Leonard Euler en 1735, quien demostró que tal paseo era imposible.

Definiciones

Una caminata en un grafo $G = (V, E)$ es una sucesión alternada de vértices y aristas $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$, donde $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$. Si $v_0 = v_k$ la caminata se dice cerrada, de lo contrario se dice abierta.

Una caminata es euleriana si incluye a cada arista del grafo exactamente una vez. Un grafo es euleriano si admite una caminata euleriana cerrada.

Grafos Eulerianos

Teorema

Un grafo es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Demostración

Sea G un grafo euleriano. Es obvio que G es conexo. Ahora bien, el grado de un vértice v_i en una caminata euleriana es igual al doble del número de veces que v_i aparece en el interior de la caminata, más uno por cada vez que v_i aparece como extremo. Si G admite una caminata euleriana cerrada, entonces es obvio que cada vértice debe tener grado par. Recíprocamente si G es conexo y todos sus vértices tienen grado par, sea $v_0 e_0 v_1 e_1 \ldots v_{k-1} e_{k-1} v_k$ una caminata sin aristas repetidas y de la mayor longitud posible.

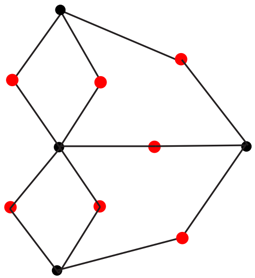
Grafos Eulerianos

Demostración (cont.)

Entonces todas las aristas incidentes con v_k pertenecen a la caminata (pues de lo contrario ésta se podría extender), y como el grado de v_k es par debe ser $v_k = v_0$. Si hubiese una arista e no perteneciente a esta caminata, y uno de sus vértices fuese un v_i, si el otro vértice es u entonces la caminata $uev_ie_i \dots v_{k-1}e_{k-1}v_0e_0 \dots e_{i-1}v_i$ sería más larga que la de mayor longitud, absurdo. Si ninguno de los vértices u, v de e es un v_i entonces, como G es conexo, hay un camino $uu_1 \dots u_jv_0$ de u a v_0. Si u_i es el primer vértice de ese camino perteneciente a la caminata, entonces $u_{i-1}u_i$ es una arista que no pertenece a la caminata pero tiene un vértice en ella, lo cual es absurdo.

Grafos Eulerianos

El problema de los puentes de Konigsberg se puede representar mediante el siguiente grafo, en el cual cada una de las regiones en que la ciudad queda dividida por los puentes se representa por un punto negro y cada puente por un punto rojo. Como hay vértices de grado impar, no existe ninguna caminata euleriana cerrada. Pero, ¿existirá alguna caminata euleriana abierta?



Grafos Eulerianos

De manera análoga al teorema sobre grafos eulerianos, puede probarse que

Teorema

Un grafo admite una caminata euleriana abierta si y sólo si es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Vemos entonces que el problema de los puentes de Konigsberg no tiene solución aún removiendo la condición de regresar al punto de partida, ya que su grafo tiene más de dos vértices de grado impar.

Sumario

- Un grafo simple es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E un conjunto de aristas (pares no ordenados de vértices).
- El grado de un vértice es el número de aristas incidentes con él. La la suma de todos los grados es igual al doble del número de aristas.
- Dos grafos son isomorfos si existe una biyección entre sus conjuntos de vértices que preserve la relación de adyacencia.
- Un árbol es un grafo conexo y acíclico. Un árbol de orden n tiene $n - 1$ aristas.
- Un grafo es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.