Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

Abril 2005

Esquema

1. Conjuntos parcialmente ordenados
    - Órdenes parciales, estrictos y lineales
    - Cadenas y anticadenas
    - Isomorfismos y Diagramas de Hasse

Orden parcial

Un orden parcial en un conjunto X es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. En otras palabras $\preceq$ es un orden parcial en X si y solamente si cumple:

1. $x \preceq x \ , \ \forall x \in X$
2. $x \preceq y \ , \ y \preceq x \Rightarrow \ x = y \ , \ \forall x, y \in X$
3. $x \preceq y \ , \ y \preceq z \Rightarrow \ x \preceq z \ , \ \forall x, y, z \in X$

Un conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.) es un par $(X, \preceq)$ donde $\preceq$ es un orden parcial en X.

Ejemplos

La desigualdad ordinaria $\leq$ en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ es un orden parcial. También lo es $\geq$. Por lo tanto $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \geq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \geq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \geq)$ son conjuntos parcialmente ordenados.

La desigualdad estricta $<$ en R no es un orden parcial, ya que no es reflexiva. Tampoco lo es $>$.

Si X es un conjunto, la inclusión $\subset$ en $\wp(X)$ es un orden parcial. Por lo tanto $(\wp(X), \subset)$ es un c.p.o., y también lo es $(\wp(X), \supset)$.

La relación $|$ (“divide a”) en $\mathbb{N}$ es un orden parcial.

Orden lineal

Definiciones

Si $(X, \preceq)$ es un c.p.o., dos elementos $x, y \in X$ son comparables si $x \preceq y$ o $y \preceq x$.

Si todos los pares de elementos de X son comparables entonces se dice que $\preceq$ es un orden lineal (o total) y que $(X, \preceq)$ es un conjunto linealmente ordenado.

Ejemplos

$(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, ya que dado cualquier par de números naturales x, y, se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$.

$(\mathbb{N}, |)$ no es linealmente ordenado, ya que hay pares de elementos no comparables (por ejemplo 2 y 3).

Orden estricto

Un orden estricto es una relación transitiva e irreflexiva.
Si $\preceq$ es un orden parcial en X entonces se puede definir un orden estricto $\prec$ en X así:

$$x \prec y \text{ si y sólo si } x \preceq y \text{ y } x \neq y.$$

Recíprocamente si $\prec$ es una relación transitiva e irreflexiva, entonces se puede obtener un orden parcial $\preceq$ así:

$$x \preceq y \text{ si y sólo si } x \prec y \text{ o } x = y.$$

Es claro que $\preceq$ es transitiva y reflexiva, y es antisimétrica pues si $x \preceq y$ y $y \preceq x$ entonces, si $x \neq y$, debe ser $x \prec y$ y $y \prec x$. Pero esto implica $x \prec x$ por la transitividad de $\prec$, lo cual es imposible pues $\prec$ es irreflexiva.

Extensión de una relación a un orden

Diremos que una relación $\lhd$ en un conjunto X es acíclica si X no contiene elementos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (con $k > 1$) tales que $a_1 \lhd a_2$, $a_2 \lhd a_3, \ldots, a_{k-1} \lhd a_k$ y $a_k \lhd a_1$.

Teorema

Toda relación acíclica puede ser extendida a un orden parcial en X.

Prueba: Sea $\preceq$ la clausura transitiva y reflexiva de $\lhd$. Supongamos por absurdo que $x \preceq y$, $y \preceq x$ y $x \neq y$. Entonces deben existir elementos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $x \lhd a_1 \lhd a_2 \lhd \cdots \lhd a_k \lhd y$ y elementos diferentes $b_1, b_2, \ldots, b_h$ tales que $y \lhd b_1 \lhd b_2 \lhd \cdots \lhd b_h \lhd x$. Pero esto contradice la hipótesis de que $\lhd$ es acíclica.

Definiciones

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $\prec$ el orden estricto asociado a $\preceq$.

Un elemento $x \in X$ es minimal si no existe ningún $y \in x$ tal que $y \prec x$. Análogamente $x \in X$ es maximal si no existe ningún $y \in X$ tal que $x \prec y$.

Si X es finito (y no vacío) entonces siempre tiene al menos un elemento maximal. En efecto, tomando cualquier elemento $x_1 \in X$, si no es maximal entonces existe otro x_2 tal que $x_1 < x_2$, y si x_2 no es maximal entonces existe otro x_3 tal que $x_2 < x_3$, y así sucesivamente. La cadena $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ debe finalizar en algún elemento x_k, ya que X es finito, y ese x_k es maximal.
Análogamente se prueba la existencia de (al menos) un elemento minimal.

Teorema de Szpilrajn

Teorema

Todo orden parcial $\preceq$ en un conjunto finito X se puede extender a un orden lineal.

Demostración.

Sea x_1 un elemento minimal de X, x_2 un elemento minimal de $X \setminus \{x_1\}$, x_3 un elemento minimal de $X \setminus \{x_1, x_2\}$, y así sucesivamente. Entonces el orden lineal $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (donde n es el número de elementos de X) es una extensión del orden parcial $\preceq$. $\square$

Aplicación: Clasificación topológica

Un glosario contiene definiciones de términos técnicos. Si la definición de un término x utiliza otro término y del glosario, diremos que $y \lhd x$. Si no hay circularidad en las definiciones entonces $\lhd$ es acíclica, y se puede extender a un orden parcial (tomando la clausura transitiva y reflexiva) y luego a un orden lineal $\leq$ (por el teorema precedente). Si se escriben las definiciones del glosario en este orden lineal entonces ninguna definición utilizará términos que no hayan sido definidos previamente.

A un orden lineal que extiende un orden parcial, o más en general una relación acíclica, se le llama clasificación topológica.

Definiciones

Sea X un conjunto finito y que $\preceq$ un orden parcial en X.

Si $Y \subset X$ diremos que $z \in X$ es cota superior de Y si $y \preceq z$ para todo $y \in Y$. Análogamente $x \in X$ es cota inferior de Y si $x \preceq y$ para todo $y \in Y$.

Si una cota superior de Y pertenece al conjunto Y entonces se le llama máximo de Y. Es decir que z es máximo de Y si $z \in Y$ y $y \preceq z$ para todo $y \in Y$. Análogamente si una cota inferior de Y pertenece al conjunto Y entonces se le llama mínimo de Y.

El máximo y el mínimo pueden no existir, pero si existen son únicos.

Definiciones

Si $Y \subset X$ y el conjunto de todas las cotas superiores de Y tiene mínimo, a ese mínimo se le llama supremo del conjunto Y. Lo denotaremos $\sup Y$.

Análogamente si el conjunto de todas las cotas inferiores de Y tiene máximo, a ese máximo se le llama ínfimo del conjunto Y. Lo denotaremos $\inf Y$.

Un c.p.o. X es un retículo si para cualquier par de elementos $a, b \in X$ existen $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ y $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Ejemplos

En $(\mathbb{Z}, \leq)$ consideremos el subconjunto $Y = \{5, 6, 9\}$. Entonces 1 es una cota inferior de Y y 15 es una cota superior. La menor cota superior es 9, es decir que sup Y=9. Como $9 \in Y$, 9 es el máximo de Y. Análogamente 5 es el mínimo de Y.

El subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$ formado por todos los enteros positivos tiene mínimo (el 1) pero no tiene ninguna cota superior. Por lo tanto no tiene máximo ni supremo.

Consideremos ahora el c.p.o. $(\mathbb{R}, \leq)$ y sea Y el intervalo abierto de números reales $(0, 1)$. Entonces sup $Y = 1$, pero como $1 \notin Y$ el conjunto Y no tiene máximo. Análogamente inf $Y = 0$ pero Y no tiene mínimo.

Ejemplos

Consideremos el c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$. Si $a, b \in \mathbb{N}$, una cota inferior del par $\{a, b\}$ es cualquier $x \in \mathbb{N}$ tal que $x \mid a$ y $x \mid b$, es decir cualquier divisor común de a y b. Pero como se sabe $d = \text{mcd}(a, b)$ es un divisor común de a y b y además, si c es cualquier otro divisor común entonces $c \mid d$. Esto significa que d es la mayor de todas las cotas inferiores de $\{a, b\}$, es decir que $d = \text{mcd}(a, b)$ es inf $\{a, b\}$.

Análogamente $\text{mcm}\{a, b\}$ es sup $\{a, b\}$.

Por lo tanto $(\mathbb{N}, |)$ es un retículo en el cual $a \wedge b = \text{mcd}(a, b)$ y $a \vee b = \text{mcm}\{a, b\}$.

Cadenas

Definiciones

Si $(X, \preceq)$ un c.p.o. y C es un subconjunto de X tal que todos los pares de elementos de C son comparables, entonces se dice que C es una cadena.

Observación: X mismo es una cadena si y sólo si el orden $\preceq$ es lineal.

Una cadena es maximal si no está estrictamente contenida en ninguna otra cadena. Esto ocurre si y sólo si para todo $x \notin C$ existe algún $y \in C$ no comparable con x.

Si X es finito entonces toda cadena C en X está contenida en una cadena maximal, que se puede obtener agregando a C uno a uno elementos de X que sean comparables con todos los de C.

Ejemplos

Consideremos el c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$. El conjunto $C = \{3, 9, 27\}$ es una cadena, ya que $3 \mid 9$, $3 \mid 27$ y $9 \mid 27$. C no es maximal ya que por ejemplo $1 \notin C$ y 1 es comparable con todos los elementos de C.

Un ejemplo de cadena maximal es el conjunto $P = \{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$ de todas las potencias de 3. En efecto, si x no es una potencia de 3 y 3^k es la mayor potencia de 3 que divide a x, entonces x no es comparable con 3^{k+1} y por lo tanto no es posible agregar ningún elemento a P de modo que siga siendo cadena.

Anticadenas

Definición

$T \subset X$ es una anticadena (o transversal) si no contiene ningún par de elementos comparables. Una anticadena es maximal si no está estrictamente contenida en ninguna otra anticadena.

Observe que una anticadena T es maximal si y sólo si cualquier elemento de X que no pertenezca a T es comparable con algún elemento de T.

En un conjunto finito toda anticadena está contenida en una anticadena maximal, que se obtiene agregando uno a uno elementos que no sean comparables con ninguno de los de la cadena, hasta que ya no sea posible.

Anticadenas

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ordenado por divisibilidad. Entonces $T = \{4, 7, 9\}$ es una anticadena. No es maximal, ya que por ejemplo el 5 no es comparable con 4 ni con 7 ni con 9. Pero $\{4, 5, 7, 9\}$ tampoco es maximal, ya que 6 no es comparable con 4 ni con 5 ni con 7 ni con 9. Agregando el 6 se obtiene la anticadena $\{4, 5, 6, 7, 9\}$.
Si se examinan los elementos que quedan (1, 2, 3 y 8) se comprueba que cada uno de ellos es comparable con al menos un elemento de $\{4, 5, 6, 7, 9\}$.
Por lo tanto $\{4, 5, 6, 7, 9\}$ es una anticadena maximal.

Teorema de Dilworth

Teorema

En cualquier conjunto finito parcialmente ordenado $(X, \preceq)$*, el máximo número de elementos que puede tener una anticadena es igual al mínimo número de cadenas que puede haber en una partición de* X *en cadenas disjuntas.*

Si denotamos mediante $a(X)$ al máximo número de elementos que puede tener una anticadena en X y mediante $c(X)$ al mínimo número de cadenas que puede haber en una partición de X en cadenas, entonces el Teorema de Dilworth afirma que $a(X) = c(X)$. El valor común de $a(X)$ y $c(X)$ se denomina *número de Dilworth* del conjunto parcialmente ordenado X.

Ejemplos

En un conjunto linealmente ordenado el Teorema de Dilworth se cumple ya que $a(X) = c(X) = 1$.

Como un ejemplo algo menos trivial sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordenado por divisibilidad. Una anticadena puede contener a lo sumo un elemento de cada uno de los conjuntos $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{5\}$, y como $\{2, 3, 5\}$ es una anticadena entonces $a(X) = 3$.
En una partición de X en cadenas el 2, el 3 y el 5 deben pertenecer a cadenas diferentes, por lo tanto $c(X) \geq 3$. Pero como
$X = \{1, 2, 4\} \cup \{3, 6\} \cup \{5\}$ es una partición en cadenas entonces $a(X) = 3$.

Teorema de Dilworth

Demostración

Es fácil ver que $a(X) \leq c(X)$, ya que si T es una anticadena con $a(X)$ elementos, en cualquier partición de X en cadenas cada elemento de T debe pertenecer a una cadena distinta.

La desigualdad contraria se prueba por inducción en el número de elementos de X. Los detalles pueden verse en mi libro Teoría Combinatoria, páginas 97 y 98.

Isomorfismo

Definición

Dos conjuntos parcialmente ordenados $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$ se dice que son isomorfos si existe una biyección $f : X \to Y$ tal que para todo par de elementos $x, y \in X$ se cumple

$$x \leq y \quad \text{si y sólo si } f(x) \preceq f(y).$$

En este caso se dice que f es un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Ejemplo

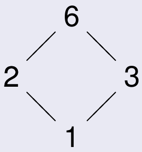
Sean $X = \wp(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 6\}$. Entonces $(X, \subset)$ y $(Y, |)$ son isomorfos, con f definida como: $f(\varnothing) = 1$, $f(\{a\}) = 2$, $f(\{b\}) = 3$ y $f(\{a, b\}) = 6$.

Diagramas de Hasse

Un diagrama de Hasse es un diagrama de un c.p.o. $(X, \preceq)$ en el cual cada elemento de X se representa mediante un punto, y dos elementos diferentes x e y se unen mediante un segmento dirigido de x a y si $x \preceq y$ y no existe ningún $z \in X$, diferente de x e y, tal que $x \preceq z \preceq y$. Generalmente los elementos mayores se representan arriba de los menores, lo que hace innecesario mostrar el sentido de los segmentos.

Ejemplo

$(\{1, 2, 3, 6\}, |)$



Diagramas de Hasse

Los diagramas de Hasse son útiles para darse cuenta de si dos c.p.o.'s son isomorfos o no. Por ejemplo el c.p.o. $(\wp(\{a, b\}), \subset)$ tiene el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \{a, b\} & \\
\{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

lo que hace evidente el isomorfismo con $(\{1, 2, 3, 6\}, |)$.

Diagramas de Hasse

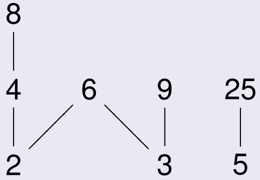
En cambio el c.p.o. $(\{1,2,3,4\}),\leq)$ tiene el diagrama:

$$\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}$$

y se ve claramente que no es isomorfo a $(\{1,2,3,6\},|)$.

Diagramas de Hasse

Como ejemplo adicional observemos el diagrama de Hasse del c.p.o. $(\{2,3,4,5,6,8,9,25\}),|)$:



Como se ve este c.p.o. no tiene máximo ni mínimo, pero tiene tres elementos minimales (2, 3 y 5) y cuatro maximales (6, 8, 9 y 25).
Su número de Dilworth es 4.

Sumario

- Un conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.) es un par $(X, \preceq)$ donde X es un conjunto y $\preceq$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en X.
- Toda relación acíclica puede extenderse a un orden parcial, y todo orden parcial a uno lineal.
- En cualquier c.p.o. finito $(X, \preceq)$, el máximo número de elementos que puede tener una anticadena es igual al mínimo número de cadenas que puede haber en una partición de X en cadenas disjuntas.
- Dos c.p.o.'s son isomorfos si existe una biyección entre los conjunto subyacentes que preserva el orden.