Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

Abril 2005

Esquema

1. Relaciones de recurrencia lineales
   - Recurrencias homogéneas de orden superior
   - Recurrencias no homogéneas

2. Funciones Generatrices
   - Sucesiones y operadores
   - Series de potencias formales

Recurrencias homogéneas de orden superior

En general, dada una recurrencia lineal homogénea de orden k

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

si su ecuación característica $r^k = c_1 r^{k-1} + \cdots + c_{k-1} r + c_k$ tiene raíces $r_1, \ldots, r_t$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$ entonces la solución general es:

$$x_n = P_1(n) r_1^n + \cdots + P_t(n) r_t^n,$$

siendo $P_i(n)$ un polinomio en n de grado menor que m_i. En particular si todas las raíces son simples entonces la solución es

$$x_n = A_1 r_1^n + \cdots + A_k r_k^n.$$

Recurrencias homogéneas de tercer orden

Por ejemplo una recurrencia de tercer orden con tres raíces características simples r_1, r_2 y r_3 tiene solución general

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n + Cr_3^n.$$

Si en cambio tiene una raíz doble r_1 y una simple r_2 entonces la solución es

$$x_n = (An + B)r_1^n + Cr_2^n,$$

y si sólo tiene una raíz triple r_1 la solución es:

$$x_n = (An^2 + Bn + C)r_1^n.$$

Ejemplo de recurrencia homogénea de tercer orden

Hallar la solución general de la recurrencia

$$x_n = x_{n-1} + 8x_{n-2} - 12x_{n-3}.$$

La ecuación característica es $r^3 = r^2 + 8r - 12$, o bien

$$r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0.$$

Si tiene una raíz entera debe ser un divisor de 12.
Como $1^3 - 1^2 - 8 + 12 = 4 \neq 0$, 1 no es raíz.
Como $(-1)^3 - (-1)^2 - 8(-1)r + 12 = 18 \neq 0$, -1 no es raíz.
Pero $2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0$, por lo tanto 2 es una raíz.

Ejemplo de recurrencia homogénea de tercer orden

Dividiendo $r^3 - r^2 - 8r + 12$ entre $r - 2$ (por el método de Ruffini) se tiene

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Nos queda ahora la ecuación de segundo grado

$$r^2 + r - 6 = 0,$$

cuyas raíces son 2 y -3.

Ejemplo de recurrencia homogénea de tercer orden

Por lo tanto la solución general de la recurrencia

$$x_n = x_{n-1} + 8x_{n-2} - 12x_{n-3}$$

es

$$x_n = (An + B)2^n + C(-3)^n.$$

Si se desea alguna solución particular con condiciones iniciales dadas x_0, x_1, x_2 se resuelve el sistema

$$\begin{aligned} B + C &= x_0 \\ 2(A + B) - 3C &= x_1 \\ 4(2A + B) + 9C &= x_2. \end{aligned}$$

Ejemplo de tercer orden

Hallar la solución general de la recurrencia lineal no homogénea $x_n = x_{n-1} + 8x_{n-2} - 12x_{n-3} + 12n - 77$.

Solución

Busquemos una solución particular de la forma $x_n = an + b$.

$an+b = a(n-1)+b+8(a(n-2)+b)-12(a(n-3)+b)+12n-77,$
$an+b = an-a+b+8(an-2a+b)-12(an-3a+b)+12n-77,$
$an+b = (-3a+12)n - a + b - 16a + 8b + 36a - 12b - 77,$
$an+b = (-3a+12)n + 19a - 3b - 77,$

Por lo tanto $a = -3a + 12$, de donde $4a = 12$ y $a = 3$, y $b = 19a - 3b - 77$, es decir $4b = 19a - 77 = 57 - 77 = -20$, de donde $b = -5$.
Hemos hallado la solución particular $3n - 5$.

Ejemplo de tercer orden

La solución general de la recurrencia no homogénea

$$x_n = x_{n-1} + 8x_{n-2} - 12x_{n-3} + 12n - 77$$

se obtiene sumando la solución particular $3n - 5$ a la solución general de la recurrencia homogénea asociada, la cual ya la hallamos y es $x_n = (An + B)2^n + C(-3)^n$. Por lo tanto la solución general de la recurrencia no homogénea es

$$x_n = 3n - 5 + (An + B)2^n + C(-3)^n.$$

A partir de esta solución general se puede obtener cualquier solución particular con condiciones iniciales dadas x_0, x_1 y x_2. Como ejemplo busquemos la solución particular con $x_0 = x_1 = 0$ y $x_2 = 39$.

Ejemplo de tercer orden

Igualando n sucesivamente a 0, 1 y 2 en

$$x_n = 3n - 5 + (An + B)2^n + C(-3)^n$$

se obtiene el sistema $-5 + B + C = 0$, $-2 + 2A + 2B - 3C = 0$, $1 + 8A + 4B + 9C = 39$, o bien

$$\begin{aligned} B + C &= 5 \\ 2A + 2B - 3C &= 2 \\ 8A + 4B + 9C &= 38 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 1$, $B = 3$, $C = 2$. Por lo tanto la solución particular buscada es

$$x_n = 3n - 5 + (n + 3)2^n + 2(-3)^n.$$

Sucesiones y operadores

Sea a una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números reales o complejos. La sucesión trasladada Ta se define como $(Ta)_n = a_{n+1}$. En otras palabras, Ta es $a_1, a_2, a_3, \ldots$

La sucesión de diferencias Δa se define como $(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n$, es decir que Δa es $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots$

Si se define el operador identidad I mediante $Ia = a$, entonces $\Delta = T - I$ y $T = I + \Delta$. De aquí, por el teorema del binomio:

$$T^n = (I + \Delta)^n = I + \binom{n}{1}\Delta + \binom{n}{2}\Delta^2 + \cdots + \Delta^n,$$

$$\Delta^n = (T - I)^n = T^n - \binom{n}{1}T^{n-1} + \binom{n}{2}T^{n-2} + \cdots + (-1)^n I.$$

Sucesiones y operadores

Cuando se aplica el operador Δ a un polinomio en n de grado k se obtiene un polinomio de grado $k-1$. Si se aplica dos veces resulta un polinomio de grado $k-2$ y así sucesivamente. Si se aplica k o más veces da 0. Por ejemplo

$$\Delta(n^2+2n-7)=(n+1)^2+2(n+1)-7-(n^2+2n-7)=2n+3,$$

$$\Delta^2(n^2+2n-7)=\Delta(2n+3)=2,$$
$$\Delta^3(n^2+2n-7)=\Delta(2)=2-2=0,$$

y en general para $k\geq 3$

$$\Delta^k(n^2+2n-7)=0.$$

Sucesiones y operadores

Supongamos que x_n sea un polinomio de grado k en n. Puesto que $\Delta^{k+1}x_n = 0$ y

$$(I - a\Delta)(I + a\Delta + a^2\Delta^2 + \cdots + a^k\Delta^k) = I - a^{k+1}\Delta^{k+1},$$

resulta que

$$(I - a\Delta)(I + a\Delta + a^2\Delta^2 + \cdots + a^k\Delta^k)x_n = x_n,$$

o sea que

$$(I + a\Delta + a^2\Delta^2 + \cdots + a^k\Delta^k)x_n = (I - a\Delta)^{-1}x_n.$$

Esto permite hallar soluciones particulares de ciertas recurrencias. Por ejemplo si $a_{n+1} = 3a_n - 2n^2 - 4n + 14$, como $a_{n+1} = Ta_n = (\Delta + I)a_n$,

$$a_{n+1} - 3a_n = (\Delta - 2I)a_n = -2(I - \frac{\Delta}{2})a_n$$

Sucesiones y operadores

La recurrencia puede expresarse entonces como $-2(I-\Delta/2)a_n = -2n^2 - 4n + 14$, o bien

$$(I - \frac{\Delta}{2})a_n = n^2 + 2n - 7.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_n &= (I - \frac{\Delta}{2})^{-1}(n^2 + 2n - 7) \\ &= (I + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{2^2})(n^2 + 2n - 7) \\ &= (n^2 + 2n - 7) + \frac{1}{2}(2n + 3) + \frac{1}{4}2 = n^2 + 3n - 5. \end{aligned}$$

Sucesiones y operadores

Como ejemplo de recurrencia de segundo orden tomemos

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 2n^2 + 4n - 14.$$

Como

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = (T^2 - 5T + 6I)a_n$$

y

$$T^2 - 5T + 6I = (I + \Delta)^2 - 5(I + \Delta) + 6I = \Delta^2 - 3\Delta + 2I = (\Delta - 2I)(\Delta - I)$$

la recurrencia se puede plantear como

$$2(I - \frac{\Delta}{2})(I - \Delta)a_n = 2n^2 + 4n - 14,$$

Sucesiones y operadores

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
(I-\Delta)a_n &= (I-\frac{\Delta}{2})^{-1}(n^2+2n-7) \\
&= (I+\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{2^2})(n^2+2n-7) \\
&= n^2+2n-7+\frac{1}{2}(2n+3)+\frac{1}{4}2 = n^2+3n-5.
\end{aligned}
$$

Y finalmente

$$
\begin{aligned}
a_n &= (I+\Delta)^{-1}(n^2+3n-5) = (I+\Delta+\Delta^2)(n^2+3n-5) \\
&= n^2+3n-5+(2n+4)+2 = n^2+5n+1.
\end{aligned}
$$

Convolución de sucesiones

Si a y b son dos sucesiones su convolución $a * b$ se define como

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ejemplo

La convolución de la sucesión constante 1, 1, 1,... consigo misma es 1, 2, 3,.... En efecto, si ponemos $a_k = 1$ para todo $k \geq 0$ se tiene

$$(a * a)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

Series de potencias formales

Una serie de potencias formal en la variable x, con coeficientes reales o complejos, es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

También se dice que esta serie es la función generatriz de la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$, y se denotará $G_a(x)$. Es decir que

$$G_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

En este curso no nos ocuparemos del problema de la convergencia de estas series sino sólo de las operaciones formales con ellas.

Series de potencias formales

Suma de series formales

La suma de dos series formales se realiza sumando los coeficientes de términos correspondientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

Producto por un escalar

El producto de una serie formal por un escalar se obtiene multiplicando cada coeficiente de la serie por el escalar:

$$k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n.$$

Producto de series de potencias formales

El producto se dos series de potencias formales se define como

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n,$$

o sea

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

Producto de series de potencias formales

Como se ve los coeficientes del producto de $G_a(x)$ y $G_b(x)$ son los términos de la convolución $a * b$, es decir

$$G_a(x)G_b(x) = G_{a*b}(x).$$

Ejemplo

Como ya vimos que la convolución de la sucesión constante 1, 1, 1,... consigo misma es 1, 2, 3, 4,... resulta que

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

Polinomios

Un polinomio se puede considerar como un caso particular de serie de potencias formal, en la cual todos los coeficientes a partir de uno en adelante son nulos:

$$a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k = a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k+0\cdot x^{k+1}+0\cdot x^{k+2}+\cdots$$

Las operaciones definidas para series formales extienden las operaciones análogas definidas para polinomios.

Cociente de dos series formales

Si $b_0 \neq 0$ entonces el cociente de dos series $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)/(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$ es la única serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tal que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Los coeficientes c_0, c_1, c_2,... se obtienen despejándolos de

$b_0 c_0 = a_0,$

$b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1,$

$b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2,$

...

Cociente de dos series formales

Ejemplo

El cociente de 1 entre $1 - x$ es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tal que

$$(1 - x)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots) = 1$$

de donde
$c_0 = 1$,
$c_1 - c_0 = 0$, es decir que $c_1 = c_0 = 1$,
$c_2 - c_1 = 0$, es decir $c_2 = c_1 = 1$,

y así sucesivamente todos los c_i son 1, por lo cual

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Más ejemplos

Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

se tiene también que

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a}(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \cdots)$$

El desarrollo en serie de una función racional puede obtenerse descomponiendola en fracciones simples y aplicando lo anterior.

Derivación de una serie formal

La derivada de la serie de potencias formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Ejemplo

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)'' = 2x + 3 \cdot 2x^2 + 4 \cdot 3x^3 + \cdots$$

Traslación de una serie formal

La trasladada de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es

$$G_{Ta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

Observe que

$$G_{Ta}(x) = \frac{G_a(x) - a_0}{x}.$$

y análogamente

$$G_{T^2a}(x) = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots = \frac{G_a(x) - a_0 - a_1 x}{x^2},$$

$$G_{T^3a}(x) = \frac{G_a(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^3}, \quad \text{etc.}$$

Teorema del binomio

El desarrollo de $(1+x)^\alpha$ (para α real) es una serie de potencias (que converge para $|x|<1$).

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

Ejemplo

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)x^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)x^4 + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{15}{128}x^4 + \cdots$$

Recurrencias y Funciones generatrices

Si una sucesión satisface una recurrencia lineal generalmente es fácil hallar su función generatriz. Por ejemplo para la sucesión $a_0 = 4$, $a_1 = 7$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ para $n \geq 0$, si se multiplica la recurrencia por x^n y se suma de $n = 0$ a ∞ resulta

$$G_{T^2a}(x) = 5G_{Ta}(x) - 6G_a(x),$$

$$\frac{G_a(x) - 4 - 7x}{x^2} = 5\frac{G_a(x) - 4}{x} - 6G_a(x),$$

$$G_a(x) - 4 - 7x = 5x(G_a(x) - 4) - 6x^2 G_a(x),$$

$$G_a(x) = \frac{4 - 13x}{1 - 5x + 6x^2}$$

Recurrencias y Funciones generatrices

Como $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$ poniendo $t = 1/x$ resulta $1/x^2 - 5/x + 6 = (1/x - 2)(1/x - 3)$ y multiplicando por x^2 queda $1 - 5x + 6x^2 = (1-2x)(1-3x)$. Poniendo

$$G_a(x) = \frac{4 - 13x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}$$

se calcula $A = 5$ y $B = -1$. Por lo tanto

$$G_a(x) = 5(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots) - (1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots)$$

y se deduce que $a_n = 5 \cdot 2^n - 3^n$.

Números de Catalan

Como una aplicación adicional consideremos la recurrencia

$$a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0$$

con condición inicial $a_0 = 1$. Esta recurrencia puede escribirse como $Ta = a * a$, por lo tanto $G_{Ta} = G_{a*a} = (G_a)^2$ y

$$\frac{G_a(x) - C_0}{x} = G_a(x)^2,$$

de donde $xG_a(x)^2 - G_a(x) + 1 = 0$ y
$G_a(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/(2x)$.
Desarrollando por el teorema del binomio resulta:

Números de Catalan

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \frac{1}{2}4x - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}(4x)^2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}(4x)^3 - \cdots$$

de donde se sigue que

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + \frac{2}{2!}x + \frac{2^2}{3!}1\cdot 3x^2 + \frac{2^3}{4!}1\cdot 3\cdot 5x^3 + \cdots$$

y por lo tanto

$$a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Números de Catalan

Los números

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

se llaman números de Catalan. Los primeros valores son $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$. Estos números aparecen en multitud de problemas combinatorios. Por ejemplo el número de maneras de emparejar correctamente n paréntesis izquierdos y n derechos es C_n (para $n = 1$ sólo hay una manera: (), para $n = 2$ hay 2: ()(), (()), para $n = 3$ hay 5: ()()(), ()(()), (())(), (()()), ((())).

Otro ejemplo es el número de triangulaciones de un polígono de n vértices, que es igual a C_{n-2}.

Sumario

- Una recurrencia lineal homogénea $x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}$ con raíces características $r_1, \ldots, r_t$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$ tiene como solución general:

$$x_n = P_1(n) r_1^n + \cdots + P_t(n) r_t^n,$$

  donde $P_i(n)$ es un polinomio en n de grado menor que m_i.
- La función generatriz de la sucesión a_0, a_1, a_2, ... es $G_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$