Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
jhnieto@yahoo.com

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

2005

Esquema

1. Permutaciones
   - Representación, ciclos y tipos
   - Números de Stirling de 1a. clase

Permutaciones de un conjunto

Definición

Una permutación de un conjunto X es una biyección de X en sí mismo. El conjunto de todas las permutaciones de X se denota $S(X)$. Si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces el conjunto de sus permutaciones se denota S_n.

Representación

Una permutación $\sigma \in S_n$ se puede representar en la forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

lo que significa que $\sigma(i) = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
La representación de σ en forma de sucesión es simplemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Composición de permutaciones

Como las permutaciones son funciones de un conjunto en sí mismo, se pueden componer. Escribiremos la permutación que se aplica primero a la derecha, y la otra a su izquierda (como se acostumbre para funciones).

Ejemplo

Sean

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $\tau\sigma$ es

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ciclos

Definición

Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números diferentes entre 1 y n la permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3, \ldots,$ $\sigma(a_{k-1}) = a_k$, $\sigma(a_k) = a_1$ y $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ se denomina ciclo y se representa como $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k)$.

Ejemplo

Si $n = 6$ entonces $\sigma = (3, 1, 5, 2)$ es la permutación que envía el 3 al 1, el 1 al 5, el 5 al 2 y el 2 al 3, dejando 4 y 6 fijos:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observe que los elementos de un ciclo se pueden rotar: $(3, 1, 5, 2) = (1, 5, 2, 3) = (5, 2, 3, 1) = (2, 3, 1, 5)$.

Descomposición en ciclos disjuntos

Ejemplo

Consideremos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 4$ y $\sigma(4) = 1$, cerrándose un ciclo. Del mismo modo $\sigma(2) = 6$ y $\sigma(6) = 2$, cerrándose otro ciclo. Finalmente $\sigma(5) = 5$. Entonces se dice que

$$\sigma = (1, 3, 4)(2, 6)(5)$$

es la descomposición de σ en *ciclos disjuntos*.

Composición de permutaciones

Ejemplo

La composición de permutaciones se puede hacer directamente a partir de sus expresiones en ciclos disjuntos.
Por ejemplo si $n = 7$, $\sigma = (1,4,3,7)(2)(5,6)$ y
$\tau = (1)(2,3,6)(4,7)(5)$, entonces
$\tau\sigma(1) = \tau(4) = 7$, $\tau\sigma(7) = \tau(1) = 1$, $\tau\sigma(2) = \tau(2) = 3$,
$\tau\sigma(3) = \tau(7) = 4$, $\tau\sigma(4) = \tau(3) = 6$, $\tau\sigma(6) = \tau(5) = 5$,
$\tau\sigma(5) = \tau(6) = 2$,
por lo tanto
$\tau\sigma = (1,7)(2,3,4,6,5)$.

Tipo de una permutación

Definición

Sea σ una permutación de un $\{1, 2, \ldots, n\}$ y llamemos λ_i al número de ciclos de longitud i en la descomposición de σ en ciclos disjuntos. El tipo de σ es la sucesión $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Observe que $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$.

Ejemplo

Si $n = 9$ y $\sigma = (1, 5, 2, 6)(3)(4, 8)(7, 9)$ entonces se tiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$ y $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$. Por lo tanto el tipo de esta permutación es 1,2,0,1,0,0,0,0,0.

Número de permutaciones de un tipo dado

Teorema

Si $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$ *entonces el número total de permutaciones de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *de tipo* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *es*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!}$$

Ejemplo

El número de permutaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de tipo 0,2,1,0,0,0,0 es

$$\frac{7!}{2^2 3^1 2! 1!} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Número de permutaciones de un tipo dado

Demostración

Sea $\sigma \in S_n$ una permutación de tipo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, y escribamos su descomposición en ciclos disjuntos comenzando por los de longitud 1, siguiendo con los de longitud 2 y así sucesivamente. Cada ciclo de longitud λ_i se puede escribir de λ_i maneras, según el elemento que coloquemos primero. Además los ciclos de longitud λ_i pueden permutarse entre sí de $\lambda_i!$ maneras. Entonces el número de maneras de escribir la descomposición de σ ser'a:

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!$$

Número de permutaciones de un tipo dado

Demostración (cont.)

Hagamos ahora una lista con las $n!$ permutaciones de los numeros del 1 al n escritas como sucesiones de n elementos, y pongamos paréntesis del modo siguiente: λ_1 pares de paréntesis encerrando a cada uno de los λ_1 primeros elementos de cada entrada de la lista, λ_2 pares de paréntesis encerrando de a pares a los $2\lambda_2$ elementos siguientes, y así sucesivamente. La condición $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$ asegura que el último paréntesis cerrará a la derecha del último elemento. En la lista resultante aparecerán todas las permutaciones $\sigma \in S_n$ de tipo $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ y cada una de ellas aparecerá $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!$ veces. Si se divide $n!$ por esta cantidad se obtiene el número de permutaciones de tipo $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Tipo de una partición

Definición

Si P es una partición de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y λ_i es el número de bloques de longitud i (para $i = 1, 2, \ldots, n$) entonces se dice que el tipo de P es $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Observe que $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$.

Ejemplo

Si $n = 9$ y $P = \{\{1, 5, 2, 6\}, \{3\}, \{4, 8\}, \{7, 9\}$ entonces se tiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$ y $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$.
Por lo tanto el tipo de esta partición es 1,2,0,1,0,0,0,0,0.

Número de particiones de un tipo dado

Teorema

Si $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$ *entonces el número total de particiones de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *de tipo* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *es*

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!}$$

Ejemplo

El número de particiones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ de tipo 0,2,0,1,0,0,0,0 es

$$\frac{8!}{2!^2 4!^1 2! 1!} = \frac{40320}{192} = 210.$$

Número de particiones de un tipo dado

Demostración

Escribamos las $n!$ permutaciones de $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ en forma de sucesión y a cada una de ellas hagámosle corresponder una partición así: con los primeros λ_1 elementos formamos λ_1 bloques de un elemento; con los siguientes λ_2 pares de elementos formamos λ_2 bloques de dos elementos cada uno, y así sucesivamente. De este modo se obtienen todas las particiones de $\mathbb{N}_n$ de tipo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pero cada una de ellas aparece repetida $(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!$ veces, pues para cada $k = 1, \ldots, n$ los λ_k bloques de k elementos pueden permutarse entre sí de $\lambda_k!$ maneras, y los elementos de cada uno de estos bloques pueden permutarse entre sí de $k!$ maneras.

Números de Stirling de 1.ª clase

Definición

El número de permutaciones de n elementos que se descomponen en exactamente k ciclos disjuntos denomina número de Stirling de primera clase con índices n y k y se denota mediante el símbolo $\left[{n \atop k}\right]$.

Ejemplo

Las permutaciones de 1,2 y 3 descompuestas en ciclos disjuntos son $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, (1)(2,3), (2)(1,3), (3)(1,2) y (1)(2)(3). Por lo tanto

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 2, \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 3, \quad \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1.$$

Números de Stirling de 1.ª clase

Propiedades elementales

- $$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$
- $$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$
- $$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

Relación de recurrencia

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Demostración.

Las permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que se descomponen en k ciclos disjuntos son de dos tipos: (1) las que dejan fijo a n y (2) las demás. Las del tipo 1 son $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$. En las de tipo 2, n debe aparecer en un ciclo acompañado al menos de otro elemento. Eliminando a n de ese ciclo resulta una permutación de $\mathbb{N}_{n-1}$ que se descompone en producto de k ciclos disjuntos. Así se pueden obtener todas esas permutaciones, pero cada una aparecerá repetida $n-1$ veces porque el elemento n puede ir antes de cualquier número de 1 a $n-1$. Por tanto las permutaciones de tipo 2 son $(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$. □

Teorema

Para todo $n \geq 1$ se cumple:

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k.$$

Ejemplo

Para $n = 1$, $x = \left[{1 \atop 1} \right] x^1$.
Para $n = 2$, $x(x+1) = x^2 + x = \left[{2 \atop 1} \right] x + \left[{2 \atop 2} \right] x^2$.
Para $n = 3$,
$x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x = \left[{3 \atop 1} \right] x + \left[{3 \atop 2} \right] x^2 + \left[{3 \atop 3} \right] x^3$.

Demostración

Por inducción en n. Para $n = 1$ se cumple. Para $n > 1$ escribamos $x(x+1)\cdots(x+n-1) = A_{n,1}x + \cdots + A_{n,n}x^n$. Supongamos inductivamente que $A_{n-1,k} = \left[{n-1 \atop k}\right]$. Es claro que $A_{n,n} = 1 = \left[{n \atop n}\right]$. Ahora bien,

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}x^k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k\right)(x+(n-1))$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\right) x^k = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Mínimos de izquierda a derecha

Definición

Diremos que una sucesión de números diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ presenta un mínimo de izquierda a derecha (m.i.d.) en la posición i si para todo $j < i$ se cumple $a_j > a_i$. El primer término de una sucesión siempre es un m.i.d.

Ejemplo

La sucesión

$$3, 5, 4, 2, 6, 1, 8, 7$$

presenta mínimos de izquierda a derecha en las posiciones 1, 4 y 6.

Mínimos de izquierda a derecha

Definición

Diremos que la descomposición en producto de ciclos disjuntos de una permutación está escrita en forma canónica si se cumple que

1. Cada ciclo está escrito comenzando por su menor elemento.
2. Los ciclos están ordenados de izquierda a derecha en orden decreciente de sus primeros elementos.

Es claro que toda permutación puede escribirse de acuerdo a estas reglas, y de una única manera.

Ejemplo

$(2,4,1)(8,6)(5,7,3) = (1,2,4)(6,8)(3,5,7) =$ $(6,8)(3,5,7)(1,2,4)$ y esta última es la forma canónica.

Mínimos de izquierda a derecha

Ejemplo

La ventaja de la forma canónica es que si quitamos los paréntesis que encierran a cada ciclo, la permutación original puede ser reconstruida abriendo paréntesis antes de cada m.i.d. Por ejemplo si al quitar paréntesis resulta 7 5 8 3 4 1 2 5 entonces la forma canónica era (7)(5,8)(3,4)(1,2,5).

Teorema

El número de permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que al ser escritas en forma de sucesión presentan exactamente k mínimos de izquierda a derecha es $\left[{n \atop k}\right]$.

Mínimos de izquierda a derecha

Demostración.

Definamos $f : S_n \to S_n$ así: dada $\sigma \in S_n$ escribimos su descomposición en ciclos disjuntos en forma canónica, quitamos los paréntesis e interpretamos el resultado como una permutación escrita en forma de sucesión. La posibilidad de reconstruir una permutación a partir de la sucesión de elementos que aparecen en su forma canónica nos muestra que f es una biyección. Como f hace corresponder a cada permutación que se descomponga en k ciclos disjuntos otra con k mínimos de izquierda a derecha, la aplicación del principio de correspondencia finaliza la demostración. $\square$

Análisis de un Algoritmo

Supongamos que a_1, a_2,. . . ,a_n son números diferentes. Entonces el siguiente algoritmo halla el mínimo m de todos ellos.

$m \leftarrow a_1$;
para i **desde** 2 **hasta** n **haga**
  si $a_i < m$ **entonces** $m \leftarrow a_i$;

este algoritmo realiza $n-1$ comparaciones, ¿pero cuántas asignaciones se ejecutan? Eso depende del orden de los a_i. En el mejor caso, cuando $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$, se realiza una asignación.
En el peor caso, cuando $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$, se realizan n asignaciones.

Análisis de un Algoritmo (2)

En general, el número de asignaciones que realiza este algoritmo es igual al número de mínimos de izquierda a derecha que presenta la sucesión a_1, $a_2,\ldots,a_n$. Si cualquiera de las $n!$ maneras de ordenar los números a_i es igualmente probable, ¿cuál es la media del número de asignaciones? Bueno, como hay $\left[{n \atop k}\right]$ permutaciones con k mínimos de izquierda a derecha, la media será

$$A_n = \frac{1}{n!}\left(\left[{n \atop 1}\right] + 2\left[{n \atop 2}\right] + \cdots + n\left[{n \atop n}\right]\right)$$

Con el fin de hallar una expresión cerrada para A_n recordemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\left[{n \atop k}\right]x^k = x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

Análisis de un Algoritmo (3)

Derivando respecto a x queda

$$\sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k-1} = (x(x+1)\cdots(x+n-1))'$$

$$= x(x+1)\cdots(x+n-1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}\right).$$

Poniendo $x = 1$ queda

$$\sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

y dividiendo entre $n!$

$$A_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Análisis de un Algoritmo (3)

Recordando que

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\gamma+\ln n,$$

donde $\gamma \approx 0{,}57721$ es la constante de Euler, llegamos finalmente a que

$$A_n \approx \gamma + \ln n.$$

Por ejemplo para 100 números se realizarán, en promedio,

$$A_{100} \approx \gamma + \ln 100 \approx 0{,}577 + 4{,}60 = 5{,}177$$

asignaciones.
También se puede calcular la varianza del número de asignaciones.

Sumario

- El número de permutaciones de N_n de tipo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ es
$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!}$$
- El número de particiones de $\{1, 2, \dots, n\}$ de tipo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ es
$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \cdots (n!)^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!}$$
- $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$
- $$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$