

Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
jhnieto@yahoo.com

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

2005

Página del curso

Recuerden que en la página del Departamento de Matemáticas

<http://www.demat.org.ve>

siguiendo el enlace **Curso Matemática Discreta** se encuentran los materiales del curso, al igual que en

<http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/>

Horario de prácticas y consultas:

sección 001 (HB): Martes 10am - 12pm

sección 002 (HB): Miercoles 2pm - 4pm

Sección 003 (AP): Martes 4pm - 6pm

sección 004 (HB): Jueves 2pm - 4pm

Sección 005 (AP): Martes 10am - 12pm

Esquema

- Coeficientes multinomiales
- Número de Funciones Sobreyectivas

1 Principio de inclusiones y exclusiones

2 Particiones de un conjunto

- Particiones y números de Bell
- Números de Stirling de 2a. clase

Coeficientes multinomiales

Definición

Dados números naturales n y n_1, n_2, \dots, n_k ($k \geq 2$) se denota mediante el símbolo

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$$

al número de maneras de distribuir n objetos en k cajas rotuladas C_1, C_2, \dots, C_k de manera que la caja C_i contenga exactamente n_i objetos, para $i = 1, 2, \dots, k$. Llamaremos a estos números **coeficientes multinomiales**.

Más formalmente puede definirse $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$ como el número de funciones $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tales que $|f^{-1}(i)| = n_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

Cálculo de los Coeficientes multinomiales

Para distribuir $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ objetos en k cajas C_1, C_2, \dots, C_k de manera que la caja C_i contenga exactamente n_i objetos, comencemos por elegir los n_1 elementos que van a ir a la caja C_1 . Esto puede hacerse de $\binom{n}{n_1}$ maneras. Luego se eligen los n_2 elementos que van a ir a la caja C_2 . Esto puede hacerse de $\binom{n-n_1}{n_2}$ maneras, y así sucesivamente. Queda

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} &= \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!} \end{aligned}$$

Cálculo de los coeficientes multinomiales

y luego de simplificar términos iguales en el numerador y el denominador queda

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Ejemplo

$$\binom{7}{1 \ 2 \ 4} = \frac{7!}{1!2!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1!2!} = 105.$$

Teorema multinomial

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

(la sumatoria se extiende a todos los conjuntos ordenados de k enteros no negativos tales que su suma sea n)

Ejemplo

$$\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \dots n_k} = k^n$$

Funciones sobreyectivas

Teorema

El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos es:

$$\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i > 0}} \binom{n}{n_1 \dots n_k}$$

Ejemplo

Hay $2^4 = 16$ funciones de un conjunto de 4 elementos en uno de 2. De ellas las sobreyectivas son

$$\binom{4}{3 \ 1} + \binom{4}{2 \ 2} + \binom{4}{1 \ 3} = 4 + 6 + 4 = 14.$$

Más ejemplos

Ejemplo

El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de 5 elementos en uno de 3 es

$$\binom{5}{3 \ 1 \ 1} + \binom{5}{1 \ 3 \ 1} + \binom{5}{1 \ 1 \ 3} + \binom{5}{2 \ 2 \ 1} + \binom{5}{2 \ 1 \ 2} + \binom{5}{1 \ 2 \ 2} \\ = 20 + 20 + 20 + 30 + 30 + 30 = 150.$$

Ejemplo

El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de 6 elementos en uno de 3 es

$$3 \binom{6}{4 \ 1 \ 1} + 6 \binom{6}{1 \ 2 \ 3} + \binom{6}{2 \ 2 \ 2} \\ = 3 \cdot 30 + 6 \cdot 60 + 720/8 = 540.$$

Principio de inclusiones y exclusiones

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Los casos $n = 2$ y $n = 3$ ya los conocemos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Demostración.

Si x pertenece a exactamente r de los n conjuntos dados, con $1 \leq r \leq n$, entonces x está contado r veces en $\sum_i |A_i|$, luego es descontado $\binom{r}{2}$ veces en $-\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$, luego contado $\binom{r}{3}$ veces en $\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ y así sucesivamente. El número de veces que es contado en el miembro derecho es

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} = 1$$

ya que $\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} = 0$.

Como cada x perteneciente a al menos un A_i , es decir cada $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, es contado en el miembro derecho exactamente una vez, la igualdad es correcta. □

Desarreglos

Definición

Un **desarreglo** de los números del 1 al n es una permutación σ de los mismos tal que $\sigma(i) \neq i$ para todo $i = 1, \dots, n$. En otras palabras los desarreglos son las permutaciones sin puntos fijos.

Ejemplo

De las dos permutaciones de 1 y 2, a saber 1 2 y 2 1, sólo la segunda es un desarreglo.

Entre las 6 permutaciones de 1, 2 y 3 hay dos desarreglos: 231 y 312.

Entre las 24 permutaciones de 1, 2, 3 y 4 los desarreglos son: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 y 4321.

Cálculo del número de desarreglos

Aplicando el principio de inclusiones y exclusiones es posible calcular el número de desarreglos para cualquier n . Para ello sea S_n el conjunto de todas las permutaciones de los números del 1 al n . Definamos A_i como el conjunto de las permutaciones que dejan fijo el número i . Es claro que $|A_i| = (n - 1)!$, puesto que A_i se puede identificar con las permutaciones de los $n - 1$ números de 1 a n que son diferentes de i . Si $1 \leq i < j \leq n$ la intersección $A_i \cap A_j$ consta de las permutaciones que dejan fijos tanto i como j , las cuales son $(n - 2)!$. Análogamente si $1 \leq i < j < k \leq n$ entonces $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n - 3)!$, y así sucesivamente. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ son las permutaciones que dejan algún punto fijo.

Cálculo del número de desarreglos

Teorema

El número de desarreglos de los n elementos es

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} D_n &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \dots \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Número de desarreglos

Corolario

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0,368$$

Ejemplo

Obviamente $D_1 = 0$ y $D_2 = 1$.

$$D_3 = 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 3 - 1 = 2.$$

$$D_4 = 4! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 12 - 4 + 1 = 9.$$

$$D_5 = 5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$$

Funciones sobreyectivas

Como aplicación del principio de inclusiones y exclusiones calcularemos de otra manera el número de funciones sobreyectivas de $A = \{1, 2, \dots, n\}$ en $B = \{1, 2, \dots, r\}$.

El número total de funciones $f : A \rightarrow B$ es r^n .

Definamos F_i como el conjunto de las funciones $f : A \rightarrow B$ que no toman el valor i , es decir aquellas tales que $f(x) \neq i$ para todo $x \in A$. Entonces $|F_i| = (r - 1)^n$, ya que para cada $x \in A$ se puede escoger $f(x)$ de $r - 1$ maneras.

Si $1 \leq i < j \leq r$ entonces $|F_i \cap F_j| = (r - 2)^n$, ya que las funciones de $F_i \cap F_j$ son las que no toman el valor i ni el j , es decir que para cada $x \in A$ se puede escoger $f(x)$ de $r - 2$ maneras.

Si $1 \leq i < j < k \leq r$ entonces $|F_i \cap F_j \cap F_k| = (r - 3)^n$, y así sucesivamente.

Funciones sobreyectivas

Entonces por el principio de inclusiones y exclusiones

$$\begin{aligned}
 |F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_r| &= \sum_i |F_i| - \sum_{i < j} |F_i \cap F_j| \\
 &+ \sum_{i < j < k} |F_i \cap F_j \cap F_k| - \dots + (-1)^{r-1} |F_1 \cap \dots \cap F_r| \\
 &= \binom{r}{1} (r-1)^n - \binom{r}{2} (r-2)^n + \binom{r}{3} (r-3)^n - \dots + (-1)^{r-2} 1^n.
 \end{aligned}$$

Estas son las que **no son** sobreyectivas. Las sobreyectivas son

$$\begin{aligned}
 r^n - \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1} \binom{r}{j} (r-j)^n &= \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r}{j} (r-j)^n \\
 &= (-1)^r \sum_{j=1}^r (-1)^j \binom{r}{j} j^n
 \end{aligned}$$

Funciones sobreyectivas - Ejemplos

Por ejemplo el número de funciones sobreyectivas de un conjunto de 5 elementos en uno de 3 es

$$\sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{3}{j} (3-j)^5 = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 = 150.$$

y el de las de un conjunto de 6 elementos en uno de 3 es

$$3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540,$$

en concordancia con lo que obtuvimos antes. Para $n = 6$ y $k = 4$ se tiene

$$4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4 = 4096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 = 1560.$$

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto X es una colección $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de subconjuntos de X , no vacíos y disjuntos dos a dos, tales que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X$. A cada uno de los conjuntos A_i se le llama **bloque** de la partición.

Ejemplo

Las particiones del conjunto $\{a, b, c\}$ son:

- $\{a, b, c\}$ (un solo bloque),
- $\{a, b\}, \{c\}$ (2 bloques),
- $\{a, c\}, \{b\}$ (2 bloques),
- $\{b, c\}, \{a\}$ (2 bloques),
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ (3 bloques).

Números de Bell

Definición

El número total de particiones que admite un conjunto de n elementos se denomina **número de Bell de orden n** y se denota B_n .

Como existe una biyección entre las particiones de un conjunto y las relaciones de equivalencia que se pueden definir en él, B_n es también el número de relaciones de equivalencia que se pueden definir en un conjunto de n elementos.

Los primeros números de Bell son $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ y $B_3 = 5$.

Relación de recurrencia

Teorema

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

Demostración.

Todas las particiones de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ pueden obtenerse escogiendo primero los k elementos ($0 \leq k \leq n$) que acompañarán a $n+1$ en su bloque y efectuando luego una partición de los $n-k$ elementos restantes. Por lo tanto:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$



Ejemplos

Ejemplo

A partir de $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, se tiene

$$B_2 = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 = 1 + 1 = 2,$$

$$B_3 = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2 = 1 + 2 + 2 = 5,$$

$$B_4 = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 = 1 + 3 + 6 + 5 = 15,$$

$$\begin{aligned} B_5 &= \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 + \binom{4}{4} B_4 \\ &= 1 + 4 + 12 + 20 + 15 = 52. \end{aligned}$$

Números de Stirling de 2.^a clase

Definición

El número de particiones que admite un conjunto de n elementos con exactamente k bloques se denomina **número de Stirling de segunda clase** con índices n y k y se denota mediante el símbolo $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

Ejemplo

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3, \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7.$$

Propiedades elementales

Propiedades de los Números de Stirling de 2.^a clase

- $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ (por convención)
- Si $k > n$ entonces $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

Esta última propiedad se debe a que en una partición en $n - 1$ bloques todos los bloques deben contener un único elemento, excepto un bloque que contendrá dos elementos. La partición queda completamente determinada por ese bloque de dos elementos, y el número posible de esos bloques es $\binom{n}{2}$.

Relación de recurrencia

Teorema

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Demostración.

Sean X un conjunto con n elementos y x uno de ellos. Las particiones de X se pueden dividir en dos clases: (1) aquellas que tienen a $\{x\}$ como bloque, y (2) aquellas en las que x está en un bloque con otros elementos. Las del tipo (1) son claramente $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$. La del tipo (2) se pueden obtener particionando $X \setminus \{x\}$ en k bloques y agregando x a uno de ellos, lo cual puede hacerse de $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ maneras. □

Más propiedades

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

Demostración.

Para ver esto sea x un elemento de X y hagamos corresponder a cada partición de X el bloque que contiene a x . Esta función es inyectiva, y su imagen son los subconjuntos propios de X que contienen a $\{x\}$, es decir los subconjuntos de la forma $\{x\} \cup B$ donde B es un subconjunto propio de $X \setminus \{x\}$. Sólo resta observar que hay $2^{n-1} - 1$ de estos subconjuntos B . \square

Más propiedades

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{n-3} + 3 \binom{n}{n-4}.$$

Demostración.

En efecto las particiones de un conjunto de n elementos en $n - 2$ bloques son de dos tipos: (1) las que tienen $n - 3$ bloques de un solo elemento y un bloque de 3 elementos, y (2) las que tienen $n - 4$ bloques de un solo elemento y dos bloques de 2 elementos. Las del primer tipo son $\binom{n}{n-3}$, y las del segundo $3\binom{n}{n-4}$ pues una vez elegidos los $n - 4$ bloques unitarios, los 4 elementos que restan se pueden dividir en dos bloques de 2 elementos cada uno de 3 maneras diferentes. \square

Ejemplos de cálculo

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 1,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \binom{3}{2} = 3, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \binom{4}{2} = 6,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\} = \binom{5}{2} = 10, \quad \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 5 \end{matrix} \right\} = \binom{6}{2} = 15,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^3 - 1 = 7, \quad \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^4 - 1 = 15,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 3 \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 7 + 3 \cdot 6 = 25.$$

Funciones sobreyectivas

Teorema

El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos es $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

Demostración.

Sean $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y $B = \{1, 2, \dots, k\}$. Para definir una función sobreyectiva $f : A \rightarrow B$ se deben escoger los elementos cuya imagen será el 1, los elementos cuya imagen será el 2, etc. esto se puede hacer en dos etapas: (1) se escoge una partición de A en k bloques, y (2) a cada bloque se le asigna un entero diferente entre 1 y k . La primera elección se puede realizar de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ maneras y la segunda de $k!$ maneras. Por el principio del producto ambas elecciones se pueden realizar de $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ maneras. □

Cálculo de los Números de Stirling

Como $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ es igual al número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos dividido entre $k!$, se puede calcular como

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i > 0}} \binom{n}{n_1 \dots n_k}$$

o bien como

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

Sumario

- El número de funciones sobreyectivas de n en r es

$$\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i > 0}} \binom{n}{n_1 \dots n_k} = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r}{j} (r-j)^n$$

- Desarreglos $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
- recurrencia para los números de Bell: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.
- $\{n \atop k\}$ es el número de particiones de un conjunto de n elementos en exactamente k bloques.
- $\{n \atop k\} = \{n-1 \atop k-1\} + k \{n-1 \atop k\}$