

# Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto  
jhnieto@yahoo.com

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad del Zulia

Abril 2005

# Página del curso

Recuerden que en la página del Departamento de Matemáticas

<http://www.demat.org.ve>

siguiendo el enlace **Curso Matemática Discreta** se encuentran los materiales del curso, al igual que en

<http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/>

El horario de prácticas y consultas es:

sección 001: Martes 10am - 12pm

sección 002: Miercoles 2pm - 4pm

sección 004: Jueves 2pm - 4pm

# Esquema

- 1 Combinaciones
  - Combinaciones de  $n$  objetos
  - Triángulo de Pascal
  - Combinaciones con repetición
- 2 Coeficientes binomiales y multinomiales
  - Teorema del binomio
  - Algunas identidades
  - Coeficientes multinomiales

# Combinaciones de $n$ objetos

## Definición

Las **combinaciones** de  $n$  objetos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tomados de a  $k$  son los subconjuntos de  $k$  elementos del conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

## Ejemplo

Las combinaciones de  $a, b, c, d$  y  $e$  tomadas de a 2 son:  
 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}$   
y  $\{d, e\}$ .

Las combinaciones de 1, 2, 3, 4, 5 tomadas de a 3 (sin escribir llaves ni comas) son:

1 2 3, 1 2 4, 1 2 5, 1 3 4, 1 3 5, 1 4 5, 2 3 4, 2 3 5, 2 4 5, 3 4 5.

# Combinaciones en orden lexicográfico

Escribamos cada combinación de  $1, 2, \dots, n$  tomadas de a  $k$  en la forma  $c_1 c_2 \dots c_k$ , con  $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ . Observe que  $c_k \leq n$ ,  $c_{k-1} \leq n - 1$  y en general  $c_j \leq n - k + j$ . El siguiente algoritmo genera las combinaciones en orden lexicográfico:

- 1 Comenzar por  $1\ 2 \dots k$ .
- 2 Si ya se ha generado  $c_1 c_2 \dots c_k$ , examine esta secuencia de derecha a izquierda hasta encontrar el primer  $c_j$  que no haya alcanzado su máximo valor posible.
- 3 Incremente  $c_j$  en una unidad, y haga que los siguientes tomen sus menores valores posibles, es decir  $c_{j+1} = c_j + 1$ ,  $c_{j+2} = c_{j+1} + 1, \dots, c_k = c_{k-1} + 1$ .
- 4 El algoritmo finaliza cuando todos los  $c_i$  alcanzan sus valores máximos, es decir con la combinación  $n - k + 1, n - k + 2, \dots, n$ .

# Combinaciones en orden lexicográfico

El siguiente algoritmo genera las combinaciones de  $1, 2, \dots, n$  tomadas de a  $k$ .

```
 $c_0 \leftarrow -1;$   
para  $i$  desde 1 hasta  $k$  haga  $c_i \leftarrow i;$   
 $j \leftarrow 1;$   
mientras ( $j \neq 0$ ) {  
  Imprimir( $c_1, \dots, c_k$ );  
   $j \leftarrow k;$   
  mientras ( $c_j = n - k + j$ )  $j \leftarrow j - 1;$   
   $c_j \leftarrow c_j + 1;$   
  para  $i$  desde  $j+1$  hasta  $k$  haga  $c_i \leftarrow c_{i-1} + 1;$   
}
```

# Número de combinaciones

## Coeficientes binomiales

El número de subconjuntos de  $k$  elementos que tiene un conjunto de  $n$  elementos se denota  $\binom{n}{k}$ . A estos números se les llama **coeficientes binomiales**.

## Ejemplo

Vimos que  $\{a, b, c, d, e\}$  tiene 10 subconjuntos de 2 elementos, por lo tanto  $\binom{5}{2} = 10$ . También  $\binom{5}{3} = 10$ . Como  $\{a, b, c, d, e\}$  tiene un único subconjunto de 0 elementos (el vacío) se tiene  $\binom{5}{0} = 1$ . Los subconjuntos de 1 elemento son 5, a saber  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$  y  $\{e\}$ , por lo tanto  $\binom{5}{1} = 5$ . Por último  $\binom{5}{4} = 5$  y  $\binom{5}{5} = 1$ .

# Número de combinaciones

## Coeficientes binomiales

El número de subconjuntos de  $k$  elementos que tiene un conjunto de  $n$  elementos se denota  $\binom{n}{k}$ . A estos números se les llama **coeficientes binomiales**.

## Ejemplo

Vimos que  $\{a, b, c, d, e\}$  tiene 10 subconjuntos de 2 elementos, por lo tanto  $\binom{5}{2} = 10$ . También  $\binom{5}{3} = 10$ . Como  $\{a, b, c, d, e\}$  tiene un único subconjunto de 0 elementos (el vacío) se tiene  $\binom{5}{0} = 1$ . Los subconjuntos de 1 elemento son 5, a saber  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$  y  $\{e\}$ , por lo tanto  $\binom{5}{1} = 5$ . Por último  $\binom{5}{4} = 5$  y  $\binom{5}{5} = 1$ .

# Propiedades elementales

## Propiedades de los Coeficientes Binomiales

Si  $k > n$  entonces

$$\binom{n}{k} = 0,$$

ya que ningún subconjunto tiene más elementos que un conjunto que lo contiene.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

# Más propiedades elementales

## Ley de Simetría

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

## Demostración.

Sean  $U$  un conjunto con  $n$  elementos,

$X = \{A \in \wp(U) : |A| = k\}$  y  $Y = \{B \in \wp(U) : |B| = n - k\}$ . Sea

$f : X \rightarrow Y$  definida como  $f(A) = A'$ . Entonces  $f$  es una

biyección y por lo tanto  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . □

# Relación entre combinaciones, permutaciones y arreglos

Si se forman las  $\binom{n}{k}$  combinaciones de  $n$  objetos tomados de a  $k$ , y en cada una de ellas se permutan los objetos de todas las maneras posibles (es decir de  $k!$  maneras) lo que resulta son los arreglos de los  $n$  objetos tomados de a  $k$ .

Por ejemplo las combinaciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tomadas de a 2 son  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ , y  $\{b, c\}$ .

Si los elementos de cada una se permutan de las dos maneras posibles resulta

$ab, ba, ac, ca, bc$  y  $cb$ .

que son los arreglos de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tomados de a 2.

# Cálculo de los coeficientes binomiales

De lo que se acaba de ver y el Principio del producto se sigue que

$$\binom{n}{k} k! = n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

y por lo tanto

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $(n-k)!$  se tiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Ejemplo

## Problema

¿Cuántos subconjuntos de 15 elementos tiene el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$  ?

## Solución

$$\begin{aligned} \binom{25}{15} &= \binom{25}{25-15} = \binom{25}{10} \\ &= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 3268760. \end{aligned}$$

# Recurrencia satisfecha por $\binom{n}{k}$

## Fórmula de Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

## Prueba

Los subconjuntos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  con  $k$  elementos son de dos tipos: los que no contienen a  $a_n$  que son  $\binom{n-1}{k}$ , y los que contienen a  $a_n$  y a  $k-1$  elementos más de  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ , que son  $\binom{n-1}{k-1}$ .

## Otra recurrencia para $\binom{n}{k}$

### Teorema

Si  $k > 0$  entonces

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

### Prueba

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$



En el siguiente triángulo se han calculado todos los coeficientes binomiales con índice superior  $n \leq 9$ .

				1																	
					1		1														
						1	2	1													
							3	3	1												
								4	6	4	1										
									5	10	10	5	1								
										6	15	20	15	6	1						
											7	21	35	35	21	7	1				
												8	28	56	70	56	28	8	1		
													9	36	84	126	126	84	36	9	1

# Combinaciones con repetición

## Definición

Las **combinaciones con repetición** de  $n$  objetos tomados de a  $k$  son los grupos de  $k$  objetos que pueden formarse con los  $n$  dados, sin tomar en cuenta el orden pero admitiendo objetos repetidos.

## Ejemplo

Las combinaciones con repetición de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tomadas de a dos son:

$aa$ ,  $ab$ ,  $ac$ ,  $bb$ ,  $bc$ ,  $cc$ .

# Combinaciones con repetición

Dada una combinación con repetición de  $n$  objetos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tomados de a  $k$ , sea  $r_i$  el número de veces que interviene el objeto  $a_i$ . Escribamos una sucesión de ceros y unos, escribiendo para cada objeto una hilera de tantos unos como veces intervenga en la combinación (ninguno si el objeto no interviene) y usando ceros como elementos de separación entre las hileras de unos correspondientes a objetos distintas. El resultado tendrá el siguiente aspecto:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{r_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{r_2} 0 \dots \dots \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{r_n}$$

# Combinaciones con repetición

Por ejemplo si los objetos son  $a, b, c$  y  $k = 5$ , a la combinación  $abbcc$  le corresponde la sucesión 1011011. De la misma manera

a  $aaacc$  le corresponde 1110011,

a  $bbccc$  le corresponde 0110111,

a  $aaaaa$  le corresponde 1111100,

a  $bbbbbb$  le corresponde 0111110,

y a  $cccccc$  le corresponde 0011111.

La correspondencia entre combinaciones con repetición de 3 objetos tomados de a 5 y las sucesiones de 5 unos y 2 ceros es una biyección, y como hay  $\binom{7}{2} = 21$  de estas sucesiones, también hay 21 combinaciones con repetición de 3 objetos tomados de a 5.

# Combinaciones con repetición

## Número de las combinaciones con repetición

En general a cada combinación con repetición de  $n$  objetos tomados de a  $k$  le corresponde una sucesión de  $k$  unos y  $n - 1$  ceros, y la correspondencia entre combinaciones y sucesiones es biyectiva. Por lo tanto el número de las combinaciones con repetición de  $n$  objetos tomados de a  $k$  es

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

# Combinaciones con repetición

## Problema

Una floristería vende rosas, claveles y crisantemos. ¿De cuántas maneras se puede formar un ramo con una docena de esas flores?

## Solución

Se trata de combinaciones con repetición de 3 objetos tomados de a 12, por lo tanto la respuesta es

$$\binom{3 + 12 - 1}{12} = \binom{14}{12} = \binom{14}{2} = 91.$$

# Teorema del binomio

## Teorema

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

## Demostración.

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ factores}}$$

El término  $x^{n-k}y^k$  aparece cuando se toma la  $x$  en  $n - k$  factores y la  $y$  en los  $k$  factores restantes. Esto se puede hacer de  $\binom{n}{k}$  maneras, por esa razón al agrupar términos semejantes el coeficiente de  $x^{n-k}y^k$  es  $\binom{n}{k}$ . □

# Teorema del binomio

## Ejemplos

$$(x + y)^2 = \binom{2}{2}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{0}y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

(Este es un conocido producto notable.)

$$(x - y)^2 = \binom{2}{2}x^2 - \binom{2}{1}xy + \binom{2}{0}y^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

$$(x + y)^3 = \binom{3}{3}x^3 + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{1}xy^2 + \binom{3}{0}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

$$(x - y)^3 = \binom{3}{3}x^3 - \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{1}xy^2 - \binom{3}{0}y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

$$(x + y)^4 = \binom{4}{4}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{0}y^4 \\ = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

# Aplicaciones del Teorema del Binomio - I

## Suma de los coeficientes binomiales

Si  $n \in \mathbb{N}$  entonces

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

## Prueba

Por el teorema del binomio el miembro izquierdo es  $(1 + 1)^n = 2^n$ . Otra prueba: el miembro izquierdo se puede interpretar como el número total de subconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos (los subconjuntos de 0 elementos más los de 1 elemento más los de 2 elementos ...), que ya vimos que es  $2^n$ .

# Aplicaciones del Teorema del Binomio - II

## Suma alternada de coeficientes binomiales

Si  $n \in \mathbb{N}$  entonces

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

o bien

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

Prueba:  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 - 1)^n = 0$ . Otra demostración consiste en observar que un conjunto no vacío tiene tantos subconjuntos de cardinal par como subconjuntos de cardinal impar.

## Aplicaciones del Teorema del Binomio - III

### Problema

Calcular la suma

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}.$$

### Solución

La suma propuesta es el desarrollo de  $(1 + 2)^n$  y por lo tanto vale  $3^n$ .

## Aplicaciones del Teorema del Binomio - III

### Problema

Calcular la suma

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}.$$

### Solución

La suma propuesta es el desarrollo de  $(1 + 2)^n$  y por lo tanto vale  $3^n$ .

# Aplicaciones del Teorema del Binomio - IV

## Problema

Calcular la suma

$$\binom{n}{0}3^n - \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

## Solución

La suma propuesta es el desarrollo de  $(3 - 1)^n$  y por lo tanto vale  $2^n$ .

## Aplicaciones del Teorema del Binomio - IV

### Problema

Calcular la suma

$$\binom{n}{0}3^n - \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

### Solución

La suma propuesta es el desarrollo de  $(3 - 1)^n$  y por lo tanto vale  $2^n$ .

# Aplicaciones del Teorema del Binomio - V

## Problema

Calcular la suma

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}.$$

## Solución

La suma propuesta es

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

que haciendo el cambio de variable  $j = k - 1$  queda

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.$$

# Aplicaciones del Teorema del Binomio - V

## Problema

Calcular la suma

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}.$$

## Solución

La suma propuesta es

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

que haciendo el cambio de variable  $j = k - 1$  queda

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.$$

# Algunas identidades - I

## Teorema

Si  $k \leq n$  entonces

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

## Demostración.

Por inducción en  $n$ . Para  $n = k$  es cierto pues  $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$ .

Si es cierto para  $n$ , entonces para  $n + 1$  se tiene

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}. \quad \square$$

# Ejemplos del teorema anterior

## Ejemplo con $k = 1$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$$

o sea  $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ , que es la conocida fórmula para sumar los enteros de 1 a  $n$ .

## Ejemplo con $k = 2$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

que luego de multiplicar ambos miembros por 2 queda

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n = (n+1)n(n-1)/3.$$

# Una aplicación

## Suma de cuadrados consecutivos

Puesto que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = (2-1)2 + (3-1)3 + \dots + (n-1)n \\ = 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + \dots + n^2 - n = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n)$$

despejando la suma de cuadrados y aplicando la fórmula ya vista para  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n$  resulta

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n + (1 + 2 + \dots + n) \\ = (n+1)n(n-1)/3 + (n+1)n/2 = (n+1)n(2n+1)/6, \text{ o sea}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

# Algunas identidades - II

## Identidad de Vandermonde

$$\binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

## Demostración.

Sean  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Entonces se puede interpretar el miembro derecho de la identidad como la cantidad de subconjuntos de  $k$  elementos de la unión  $A \cup B$ . Pero cada uno de esos subconjuntos está formado por cierto número  $j$  de elementos de  $A$  acompañados de  $k - j$  elementos de  $B$ , los cuales pueden escogerse de  $\binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$ . Sumando para  $j = 0, 1, \dots, k$  queda probada la identidad.  $\square$

# Coeficientes multinomiales

## Definición

Dados números naturales  $n$  y  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ( $k \geq 2$ ) se denota mediante el símbolo

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$$

al número de maneras de distribuir  $n$  objetos en  $k$  cajas rotuladas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de manera que la caja  $C_i$  contenga exactamente  $n_i$  objetos, para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Llamaremos a estos números **coeficientes multinomiales**.

Más formalmente puede definirse  $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$  como el número de funciones  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tales que  $|f^{-1}(i)| = n_i$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

# Coeficientes multinomiales

## Cálculo de los coeficientes multinomiales

Para distribuir  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  objetos en  $k$  cajas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de manera que la caja  $C_i$  contenga exactamente  $n_i$  objetos, comencemos por elegir los  $n_1$  elementos que van a ir a la caja  $C_1$ . Esto puede hacerse de  $\binom{n}{n_1}$  maneras. Luego se eligen los  $n_2$  elementos que van a ir a la caja  $C_2$ . Esto puede hacerse de  $\binom{n-n_1}{n_2}$  maneras, y así sucesivamente. Queda

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_k}{n_k}$$

## Cálculo de los coeficientes multinomiales (cont.)

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!}$$

y luego de simplificar términos iguales en el numerador y el denominador queda

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$$

## Coeficientes multinomiales - Ejemplos

### Ejemplo

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 personas en tres vehículos, de modo que en el más pequeño vayan 3, en el mediano 4 y en el grande 5?

Solución:  $\binom{12}{3 \ 4 \ 5} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27720.$

### Ejemplo

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 regalos diferentes entre 4 niños, de modo que cada niño reciba 4 regalos?

Solución:  $\binom{12}{4 \ 4 \ 4} = \frac{12!}{(4!)^3} = 34650.$

# Teorema multinomial

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

(la sumatoria se extiende a todos los conjuntos ordenados de  $k$  enteros no negativos tales que su suma sea  $n$ )

## Demostración.

Al desarrollar  $(x_1 + \cdots + x_k)^n$  se obtienen  $k^n$  monomios de grado  $n$  en  $k$  variables  $x_1, \dots, x_k$ . El número de veces que aparece uno de estos monomios, digamos  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$  es igual al número de maneras de escoger  $n_1$  factores  $(x_1 + \cdots + x_k)$  para seleccionar  $x_1$ ,  $n_2$  factores para seleccionar  $x_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  factores para seleccionar  $x_k$ . Pero esto puede hacerse justamente de  $\binom{n}{n_1 \dots n_k}$  maneras. □

# Sumario

- El número de las combinaciones de  $n$  objetos tomados de a  $k$  es

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$

- El número de combinaciones con repetición de  $n$  objetos tomados de a  $k$  es  $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ .
- El **Teorema del binomio** afirma que  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$ .
- La **identidad de VanderMonde** afirma que  $\sum_j \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$ .
- El **Teorema multinomial** afirma que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$