Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
jhnieto@yahoo.com

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

Abril 2005

Página del curso

En la página web del curso

http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/

se encuentran las conferencias dictadas hasta ahora, las hojas de ejercicios y algunos otros materiales. Se puede tener acceso a los mismos materiales a través de la página del Departamento de Matemáticas

http://www.demat.org.ve

ingresando a través de:

Enlaces - Curso Matemática Discreta.

donde además pueden participar en foros, etc.

Esquema

Arreglos (o variaciones)

Definición

Los arreglos de n objetos tomados de a k son las sucesiones de k términos diferentes que se pueden formar con los objetos dados.

Ejemplo

Los arreglos de las letras a, b, c tomadas de a dos son ab, ac, ba, bc, ca, cb.
Los arreglos de las mismas letras tomadas de a tres son: abc, acb, bac, bca, cab, y cba.
Los arreglos de las letras a, b, c tomadas de a uno son simplemente a, b y c.

Número de Arreglos

Los arreglos de n objetos a_1, a_2,...,a_n tomados de a k no son otra cosa que las funciones inyectivas

$$f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

por lo tanto su número es $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Esta fórmula puede también deducirse directamente del principio del producto.

Ejemplo

En las elecciones de un club de 40 miembros se presentan planchas integradas por un candidato a presidente, un candidato a secretario y otro a tesorero. ¿Cuántas planchas diferentes pueden formarse?

Solución: $40 \times 39 \times 38 = 59280$.

Generación recursiva

Para generar recursivamente los arreglos de n elementos tomados de a k, suponiendo que ya han sido formados los de a $k-1$, se colocan a la derecha de cada uno de estos últimos, sucesivamente, los elementos que no figuran en ellos.

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c\}$. En el cuadro siguiente se ilustra la formación sucesiva de los arreglos tomados de a 1, 2 y 3:

de a 1:	a		b		c	
de a 2:	ab	ac	ba	bc	ca	cb
de a 3:	abc	acb	bac	bca	cab	cba

Arreglos con repetición

Definición

Los arreglos con repetición de n objetos tomados de a k son las sucesiones de k términos que se pueden formar con los objetos dados, permitiendo repeticiones.

Ejemplo

Los arreglos con repetición de las letras a, b, c tomadas de a dos son aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.

Número de Arreglos con repetición

Los arreglos de n objetos a_1, a_2,...,a_n tomados de a k no son otra cosa que las funciones

$$f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

por lo tanto su número es n^k.

Ejemplo

Un examen de selección múltiple consta de 10 preguntas con 4 alternativas para cada una. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden responder las 10 preguntas?
Solución: $4^{10} = 1048576$.

Arreglos con repetición

Generación recursiva

Para formar los arreglos con repetición de n objetos tomados de a k, se forman los tomados de a $k-1$ y se colocan a la derecha de cada uno de estos últimos, sucesivamente, cada uno de los n objetos. A continuación se muestra la formación sucesiva de los arreglos con repetición de a, b y c tomados de a 1, 2 y 3:

de a 1:	a			b			c		
de a 2:	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
de a 3:	aaa	aba	aca	baa	bba	bca	caa	cba	cca
	aab	abb	acb	bab	bbb	bcb	cab	cbb	ccb
	aac	abc	acc	bac	bbc	bcc	cac	cbc	ccc

Generación de arreglos con repetición

El siguiente algoritmo genera los arreglos con repetición de 1,2,...,n tomados de a k en orden lexicográfico.

para i **desde** 0 **hasta** k **haga** $a_i \leftarrow 1$;
mientras $(a_0 = 1)\{$
    Imprimir$(a_1, \ldots, a_k)$;
    $j \leftarrow k$;
    mientras $(a_j = n)\{$
        $a_j \leftarrow 1$;
        $j \leftarrow j - 1$;
    $\}$
    $a_j \leftarrow a_j + 1$;
$\}$

Generación de arreglos con repetición

Por ejemplo para $n = 2$ y $k = 3$ el algoritmo genera

1 1 1
1 1 2
1 2 1
1 2 2
2 1 1
2 1 2
2 2 2

En este momento incrementa a_0 y se sale del bucle.

Subconjuntos

Un subconjunto B de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ queda determinado si se sabe qué elementos a_i están en B y cuáles no. Pongamos $b_i = 1$ si $a_i \in B$ y $b_i = 0$ si $a_i \notin B$. Entonces la secuencia $b_1 b_2 \ldots b_n$ determina el subconjunto B. En otras palabras, hay una correspondencia biyectiva entre los subconjuntos de A y las secuencias de n bits, que se pueden generar con el algoritmo para los arreglos con repetición.

Número de subconjuntos

Las secuencias de n bits son los arreglos con repetición de dos elementos (0 y 1) tomados de a n, por lo tanto su número es 2^n y éste es el número de suconjuntos de un conjunto con n elementos.

Generación de secuencias de n bits

(En orden lexicográfico)

para i **desde** 0 **hasta** n **haga** $a_i \leftarrow 0$;
mientras $(a_n \neq 1)\{$
    Imprimir$(a_{n-1}, \ldots, a_0)$;
    $j \leftarrow 0$;
    mientras $(a_j = 1)\{$
        $a_j \leftarrow 0;\ j \leftarrow j + 1;$
    $\}$
    $a_j \leftarrow 1;$
$\}$

Códigos de Gray

Definición

Un Código de Gray de n bits es una sucesión cíclica ordenada de las 2^n secuencias de n bits, tal que dos secuencias consecutivas difieran solamente en un bit.

Ejemplo

Por ejemplo para 1 bit el código de Gray es simplemente 0, 1. Para dos bits es 00, 01, 11, 10. Para 3 bits se escribe 0 seguido de los 4 códigos de dos bits, y luego 1 seguido de los cuatro códigos de 2 bits pero en orden inverso, esto es: 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.
Si se continúa de esta manera se obtienen los códigos de Gray reflejados.

Generación del Código de Gray reflejado

para j **desde** 0 **hasta** $n+1$ **haga** $\{g_j \leftarrow 0;\ t_j \leftarrow j+1;\}$
$i \leftarrow 0;$
mientras $(i < n+1)\{$
  Imprimir$(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)$;
  $i \leftarrow t_0;$
  $g_i \leftarrow 1 - g_i;$
  $t_{i-1} \leftarrow t_i;$
  $t_i \leftarrow i+1;$
  si$(i \neq 1)$ $t_0 \leftarrow 1;$
$\}$

Permutaciones

Definición

Se llama permutaciones de n objetos a los arreglos de los n objetos tomados de a n.

Ejemplo

Las permutaciones de las letras a, b, c son:
abc, acb, bac, bca, cab, y cba.

Número de permutaciones

Hay $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ permutaciones de n objetos.

Generación recursiva de permutaciones

Ya formadas las permutaciones de los elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}$ agregue el elemento a_n a cada una de ellas, en todas las posiciones posibles.

Formación recursiva de las permutaciones de a, b y c:

		abc
	ab	acb
		cab
a		
		bac
	ba	bca
		cba

Permutaciones en orden lexicográfico

Comience por inicializar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con la permutación 1,2,...,n. Para hallar la permutación que sigue a una dada examine los a_i de derecha a izquierda hasta encontrar el primer i tal que $a_i < a_{i+1}$ (si no se encuentra el algoritmo finaliza, lo que ocurrirá luego de imprimir la última permutación $n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$). Luego halle el menor a_j con $j > i$ tal que $a_i < a_j$, intercambie a_j con a_i e invierta el orden de los elementos a_{i+1},...,a_n.

Ejemplo

Por ejemplo para $n = 9$ y la permutación 519487632 se tiene $a_i = 4$ y $a_j = 6$; luego de intercambiarlos queda 519687432 y después de invertir $a_{i+1}, \ldots, a_9$ se obtiene 519623478.

Permutaciones en orden lexicográfico

para j **desde** 1 **hasta** n **haga** $a_j \leftarrow j$;
$i \leftarrow 1$;
mientras $(i \neq 0)\{$
    Imprimir$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;
    $i \leftarrow n - 1$;
    mientras $(a_i > a_{i+1})$ $i \leftarrow i - 1$;
    $j \leftarrow n$;
    mientras $(a_i > a_j)$ $j \leftarrow j - 1$;
    $t \leftarrow a_i;\ a_i \leftarrow a_j;\ a_j \leftarrow t;\ r \leftarrow n;\ s \leftarrow i + 1$;
    mientras $(r > s)$ $\{$
        $t \leftarrow a_r;\ a_r \leftarrow a_s;\ a_s \leftarrow t$;
        $r \leftarrow r - 1;\ s \leftarrow s + 1$
    $\}$
$\}$

Permutaciones al azar

A veces hay que generar permutaciones de n objetos al azar con distribución uniforme, es decir que cada permutación debe tener la misma probabilidad de ser generada $(1/n!)$.
Supongamos que azar(a,b) es una función que genera un entero al azar con distribución uniforme en el conjunto $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Entonces para generar una permutación al azar de 1,2,. . . ,n se procede así:
Primero se inicializa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con la permutación 1,2,. . . ,n.
Luego se calcula $i =$ azar$(1, n)$ y se intercambia a_i con a_n. Esto asegura que en la posición n puede estar cualquier entero del 1 al n con igual probabilidad. Se continúa calculando $i =$ azar$(1, k)$ e intercambiando a_i con a_k, para $k = n-1, n-2, \ldots, 3, 2$.

Permutaciones al azar

para j **desde** 1 **hasta** n **haga** $a_j \leftarrow j$;
$k \leftarrow n$;
mientras $(k > 1)\{$
$\quad i \leftarrow \text{azar}(1, k)$;
$\quad t \leftarrow a_i;\ a_i \leftarrow a_k;\ a_k \leftarrow t$;
$\quad k \leftarrow k - 1$;
$\}$

Permutaciones circulares

Definición

Las permutaciones circulares de n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las maneras de disponer los n objetos alrededor de un círculo.

Ejemplo

A pesar de que las permutaciones de 3 objetos son 6, hay sólo dos posibles ordenaciones de tres objetos a, b y c en un círculo: una en la cual a la derecha de a está b y otra en la cual a la derecha de a está c.

Permutaciones circulares

Definición

Las permutaciones circulares de n objetos son las maneras de disponerlos ordenadamente alrededor de un círculo.

Una permutación circular puede represetarse en la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde a_2 es el objeto que está a la derecha de a_1, a_3 el que está a la derecha de a_2, ..., y a_n el que está a la derecha de a_{n-1}. Observe que a_1 está a la derecha de a_n. Como rotar todos los objetos alrededor del círculo no modifica la permutación se tiene
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1) = (a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2)$
$= \cdots = (a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Número de las permutaciones circulares

Supongamos que se desea generar las permutaciones circulares de n objetos a_1, a_2,...,a_n. Como sólo importa la posición relativa de los objetos, uno de ellos (digamos a_1) se puede situar en cualquier punto del círculo. A continuación a_2 se puede ubicar de una sola manera, a_3 se puede ubicar de dos maneras (en uno de los dos arcos determinados por a_1 y a_2), a_4 de tres maneras y así sucesivamente hasta a_n que se puede ubicar de $n-1$ maneras. Por el principio del producto el número de las permutaciones circulares es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$.

Permutaciones con repetición

Definición

Las permutaciones con repetición de r objetos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ con multiplicidades $k_1, \ldots, k_r$ son las sucesiones de $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ términos que se pueden formar con los a_i de modo que a_1 aparezca k_1 veces, a_2 aparezca k_2 veces,... y a_r aparezca k_r veces.

Ejemplo

Las permutaciones con repetición de los dígitos 0 y 1 con multiplicidades 2 y 3 son 00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, y 11100.

Permutaciones con repetición

Número de permutaciones con repetición

Si $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, el número de las permutaciones con repetición de r objetos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ con multiplicidades $k_1, \ldots, k_r$ es

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}$$

Prueba

Escribamos k_i copias de cada objeto a_i y permutémoslas como si todas fuesen diferentes. Se obtienen $n!$ permutaciones, pero cada una de ellas aparece repetida $k_1!\,k_2!\cdots k_r!$ veces, pues las k_i copias de cada objeto pieden permutarse entre sí de $k_i!$ maneras.

Permutaciones con repetición

Ejemplo 1

Las permutaciones con repetición de los dígitos 0 y 1 con multiplicidades 2 y 3 son

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10.$$

Ejemplo 2

¿Cuántas palabras diferentes con o sin sentido pueden formarse permutando las letras de la palabra ZORROCLOCO? Solución: son las permutaciones con repetición de las letras Z, O, R, C, L con multiplicidades 1,4,2,2,1, por lo tanto la respuesta es $10!/(1!4!2!2!1!) = 3628800/96 = 37800$.

Permutaciones con repetición

Ejemplo 1

Las permutaciones con repetición de los dígitos 0 y 1 con multiplicidades 2 y 3 son

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10.$$

Ejemplo 2

¿Cuántas palabras diferentes con o sin sentido pueden formarse permutando las letras de la palabra ZORROCLOCO? Solución: son las permutaciones con repetición de las letras Z, O, R, C, L con multiplicidades 1,4,2,2,1, por lo tanto la respuesta es $10!/(1!4!2!2!1!) = 3628800/96 = 37800$.

Sumario

- El número de arreglos de n objetos tomados de a k es $n^{\underline{k}}$.
- El número de arreglos con repetición de n objetos tomados de a k es n^k.
- El número de permutaciones de n objetos es $n!$.
- El número de permutaciones circulares de de n objetos es $(n-1)!$.
- El número de permutaciones con repetición de r objetos con multiplicidades $k_1, k_2 \ldots, k_r$ es

$$\frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_r}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$