# Matemática Discreta

Prof. José H. Nieto
http://mipagina.cantv.net/jhnieto/md/

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia

Abril 2005

# Esquema

1 Principios de la Combinatoria
- Introducción
- Principios

# Combinatoria

## ¿Qué es la Combinatoria?

La combinatoria estudia las configuraciones que pueden formarse con un número finito de objetos disponiéndolos de acuerdo con ciertas reglas. Un primer problema combinatorio es el de la existencia de tales configuraciones y un segundo problema es el de su enumeración. A continuación se examinan los principios fundamentales de la combinatoria:

1. Principio del palomar.
2. Principio de correspondencia.
3. Principio de la suma.
4. Principio del producto.

# Números naturales

Los números naturales pueden definirse así:

$$0 = \varnothing,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\},\ 3 = \{0, 1, 2\},\ 4 = \{0, 1, 2, 3\}, \dots$$

La regla de formación para obtener el número $n^+$ siguiente a $n$ es $n^+ = n \cup \{n\}$. Así se obtiene una sucesión de conjuntos diferentes, cada uno contenido en el siguiente.
Cada número natural $n$ es el conjunto de todos los números que le preceden, es decir

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

Esta definición se debe a John von Neumann.

# Números naturales

El conjunto de todos los números naturales se denotará $\omega$.

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

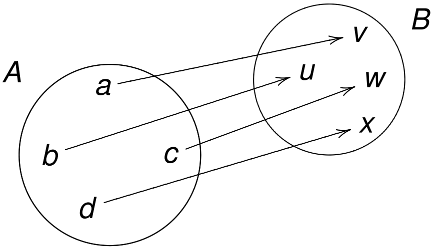
Algunos autores no incluyen al 0 entre los números naturales. El conjunto de los números naturales sin el 0 se denotará $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

# Coordinabilidad

## Definición

Dos conjuntos $A$ y $B$ se dicen coordinables si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En este caso se escribe $A \sim B$.

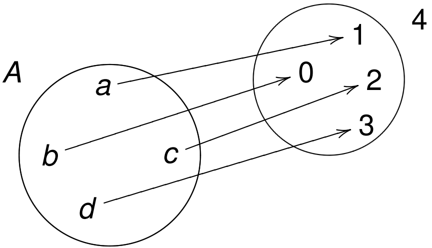



La coordinabilidad es transitiva, ya que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyecciones entonces $g \circ f : A \to C$ también es una biyección

# Número de elementos

## Definición

Un conjunto $A$ es finito si existe un número $n \in \omega$ tal que $A \sim n$. En este caso se dice que $n$ es el número de elementos o el cardinal de $A$ y se escribe $|A| = n$.




En este ejemplo $|A| = 4$.

## Ejemplo

¿Cuántos términos tiene la progresión aritmética
17, 20, 23,26,. . . , 170?

## Solución

Solución: Los términos de esta progresión se pueden escribir en la forma 17, $17+3$, $17+3\cdot 2$, . . . , $17+3\cdot k=170$, donde $k=(170-17)/3=51$. Como $f: i\mapsto 17+3i$ es una biyección entre $\{0,1,2,\ldots,51\}=52$ y $\{17,20,23,\ldots,170\}$, se concluye que la progresión tiene 52 términos.

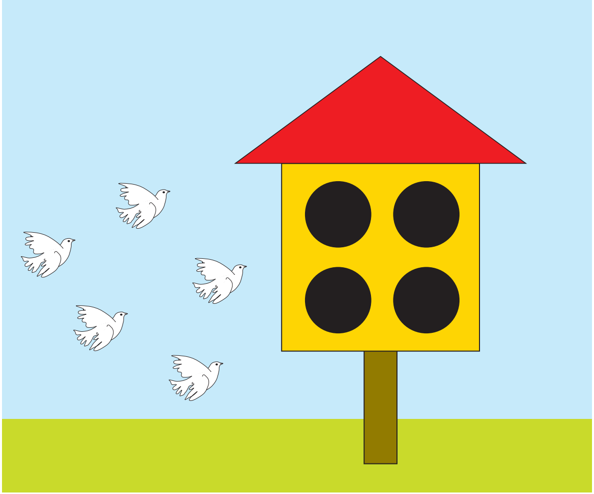
# Principio del Palomar

**Principio del Palomar**

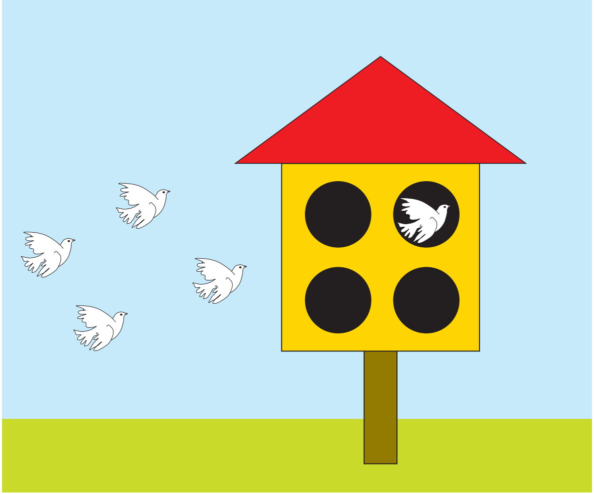
Si $|A| > |B|$ entonces ninguna $f : A \to B$ es inyectiva.

En lenguaje más sencillo esto equivale a decir que si $n$ objetos se distribuyen en $k$ cajas y $n > k$ entonces alguna caja recibe más de un objeto. El nombre Principio del palomar proviene de que si hay más palomas que nidos en un palomar y cada paloma entra en un nido, entonces algún nido contendrá más de una paloma.
Este principio también se conoce como principio de las cajas o de las casillas.

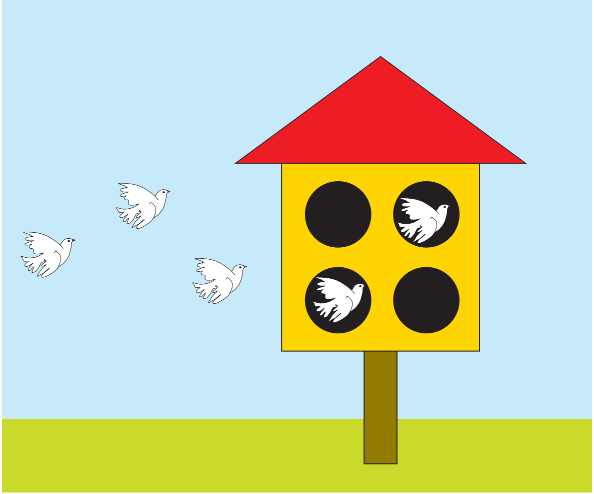
# Principio del palomar



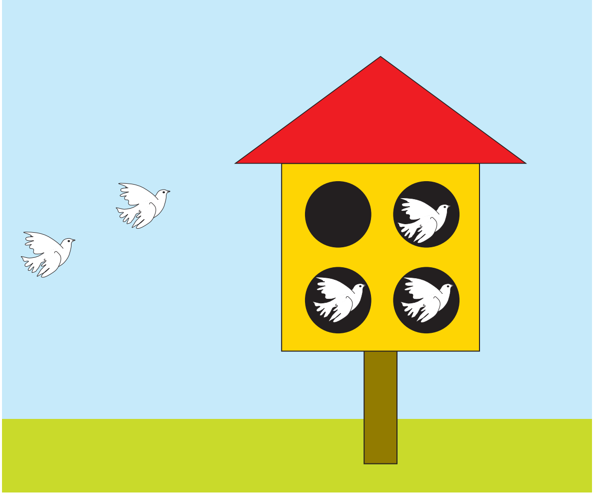
# Principio del palomar



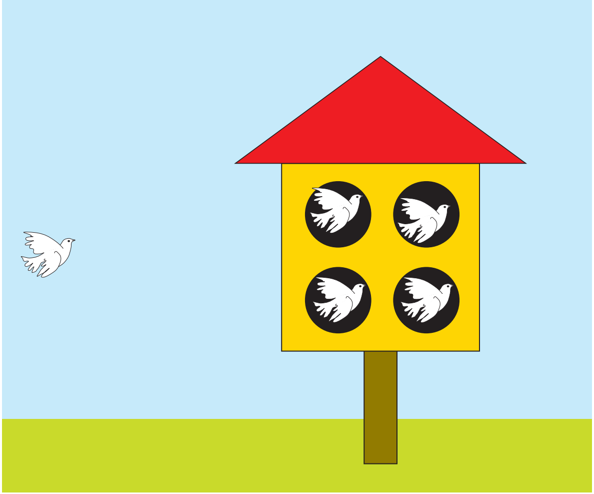
# Principio del palomar



# Principio del palomar



# Principio del palomar



# Principio del palomar

# Principio del palomar - Ejemplos

**Ejemplo**

En cualquier conjunto de tres personas hay dos del mismo sexo.

**Ejemplo**

En cualquier conjunto de trece personas hay dos nacidas en el mismo mes.

**Ejemplo**

En este instante en Maracaibo hay dos personas con exactamente el mismo número de cabellos en la cabeza (el número de cabellos en la cabeza se estima entre 90000 y 150000).

# Principio del palomar - Ejemplos

## Problema

Probar que si se escogen 26 números naturales diferentes, impares y menores que 100, siempre hay dos de ellos que suman 100.

## Solución

Hay 25 pares de números impares diferentes entre 1 y 99 que suman 100, a saber $\{1, 99\}$, $\{3, 97\}$, $\{5, 95\}$,..., $\{49, 51\}$. Dados 26 números impares diferentes entre 1 y 99, cada uno de ellos pertenece a uno de los 25 pares. Por el principio del palomar debe haber dos números pertenecientes a un mismo par, y que por lo tanto suman 100.

# Principio del palomar - Ejemplos

## Problema

Probar que si se escogen 26 números naturales diferentes, impares y menores que 100, siempre hay dos de ellos que suman 100.

## Solución

Hay 25 pares de números impares diferentes entre 1 y 99 que suman 100, a saber $\{1, 99\}$, $\{3, 97\}$, $\{5, 95\}$,$\ldots$, $\{49, 51\}$. Dados 26 números impares diferentes entre 1 y 99, cada uno de ellos pertenece a uno de los 25 pares. Por el principio del palomar debe haber dos números pertenecientes a un mismo par, y que por lo tanto suman 100.

# Principio de Dirichlet

Este principio es una generalización del principio del palomar.

## Principio de Dirichlet

Sean $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{N}$. Si $n$ objetos se distribuyen en $k$ cajas $C_1, \ldots, C_k$ y $n \geq a_1 + \ldots + a_k - k + 1$ entonces para algún $i$ $(1 \leq i \leq k)$ la caja $C_i$ contiene al menos $a_i$ objetos.

## Demostración

Si la caja $C_i$ contiene menos de $a_i$ objetos para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces el número total de objetos sería a lo sumo

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} a_i + -k < n,$$

lo cual es absurdo.

# Principio de correspondencia

## Principio de correspondencia

Si $A \sim B$ entonces $|A| = |B|$.

Este principio es evidente, ya que si $A \sim m$ y $B \sim n$ entonces por transitividad se tiene $m \sim n$, lo que sólo puede ocurrir si $m = n$.
El principio de correspondencia es muy usado en Combinatoria. A pesar de su sencillez permite resolver muchos problemas de conteo de manera rápida y elegante.

# Principio de correspondencia

## Problema

En un campeonato de béisbol jugado por el sistema de eliminatorias se enfrentan $n$ equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y juega en la ronda siguiente. Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato.

## Solución

Al finalizar el campeonato habrá un equipo campeón y $n-1$ equipos eliminados. La función que asigna a cada juego el equipo eliminado en dicho juego, es biyectiva. Por lo tanto hay tantos juegos como equipos eliminados, esto es $n-1$.

# Principio de correspondencia

## Problema

En un campeonato de béisbol jugado por el sistema de eliminatorias se enfrentan $n$ equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y juega en la ronda siguiente. Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato.

## Solución

Al finalizar el campeonato habrá un equipo campeón y $n-1$ equipos eliminados. La función que asigna a cada juego el equipo eliminado en dicho juego, es biyectiva. Por lo tanto hay tantos juegos como equipos eliminados, esto es $n-1$.

# Principio de la suma

## Principio de la suma

Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

La condición $A \cap B = \varnothing$ es esencial. Si $A \cap B \neq \varnothing$ los elementos comunes a $A$ y $B$ se cuentan una vez en $|A \cup B|$ pero dos veces en $|A| + |B|$, y se tiene

## Principio de la suma (generalizado)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

# Principio de la suma - Ejemplo

## Problema

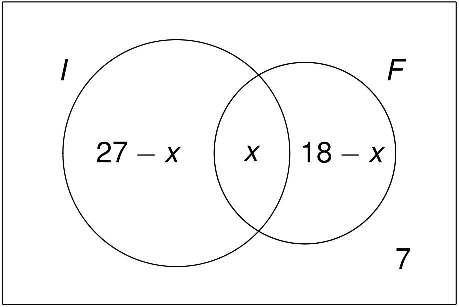
En un grupo de 40 alumnos, 7 no hablan ni inglés ni francés, 27 hablan inglés y 18 hablan francés. ¿Cuántos hablan ambos idiomas?

## Solución

Si $I$ y $F$ son los conjuntos de los que hablan inglés y francés, respectivamente, entonces $|I \cup F| = 40 - 7 = 33$. Como $|I \cup F| = |I| + |F| - |I \cap F|$ se despeja $|I \cap F| = |I| + |F| - |I \cup F| = 27 + 18 - 33 = 12$.

# Principio de la suma - Ejemplo

Otra forma de resolverlo, con un diagrama de Venn:




$(27 - x) + x + (18 - x) + 7 = 40$,
de donde $52 - x = 40$ y $x = 52 - 40 = 12$.

# Principio de la suma - Generalización

## Principio de la suma para $n$ conjuntos

Si $A_1$, $A_2$,..., $A_n$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos (es decir tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$) entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Hay también una versión para conjuntos no necesariamente disjuntos, por ejemplo para tres conjuntos $A$, $B$ y $C$ se tiene:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

La versión más general se llama Principio de inclusiones y exclusiones y se verá más adelante.

# Principio del producto

## Principio del producto

Si el primer elemento de un par ordenado se puede escoger entre $m$ posibles, y para cada elección del primer elemento hay $n$ posibles segundos elementos, entonces el número de pares diferentes que se pueden formar es el producto $mn$.

## Ejemplo

¿Cuántos números de dos cifras tienen la primera cifra impar y la segunda diferente de la primera?
Solución: La primera cifra se puede escoger de 5 maneras (ya que sólo puede ser 1, 3, 5, 7 o 9) y la segunda 9 maneras. La respuesta es $5 \cdot 9 = 45$.

# Principio del producto

## Principio del producto (generalizado)

Si el primer elemento de una $k$-upla ordenada puede escogerse entre $n_1$ posibles, y para cada selección puede escogerse el segundo elemento entre $n_2$ posibles, y así sucesivamente hasta el $k$-ésimo elemento que se puede escoger de $n_k$ maneras, entonces el número de total de $k$-uplas ordenados que se pueden formar es $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

## Ejemplo

¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar de modo que la primera cifra sea impar, la segunda par y la tercera diferente de las dos primeras?
Solución: La primera cifra se puede escoger de 5 maneras, la segunda también de 5 maneras (0, 2, 4, 6 u 8) y la tercera de 8 maneras. La respuesta es $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$.

# Funciones de un conjunto en otro

## Teorema

*Si $B^A$ denota el conjunto de todas las funciones de un conjunto $A$ en otro $B$, entonces $|B^A| = |B|^{|A|}$.*

## Demostración.

Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Para definir una función $f : A \to B$ hay que realizar $n$ elecciones consecutivas, a saber las de las imágenes de $a_1$, $a_2$,. . . ,$a_n$. Como cada una de estas elecciones se puede realizar de $m$ maneras, el número total de funciones de $A$ en $B$ es $m^n = |B|^{|A|}$. $\square$

# Conjunto potencia

## Teorema

$\wp(A) = 2^{|A|}$.

## Demostración.

Para formar un subconjunto $B$ de $A$ hay que decidir, para cada elemento de $A$, si se va a incluir en $B$ o no. Es decir que hay que tomar $n$ decisiones consecutivas, y para cada una de ellas hay dos alternativas. Por el principio del producto esto se puede hacer de $2^{|}A|$ maneras, y este es el número de subconjuntos de $A$. $\square$

# Factoriales

**Definición**

El factorial inferior de $x$ de orden $n$ es el producto de $n$ factores decrecientes, el primero de los cuales es $x$, y se denota $x^{\underline{n}}$. En símbolos:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

Por convención $x^{\underline{0}} = 1$.

Observe que $n^{\underline{n}}$ es el factorial ordinario $n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

# Funciones inyectivas

**Teorema**

*El número de funciones inyectivas de un conjunto $A$ de $n$ elementos en otro $B$ de $m$ elementos es $m^{\underline{n}}$.*

**Demostración.**

Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Para definir una función inyectiva $f : A \to B$ hay $m$ posibilidades para elegir $f(a_1)$, $m-1$ posibilidades para elegir $f(a_2)$, $m-2$ posibilidades para $f(a_3)$,..., y finalmente $m-n+1$ posibilidades para $f(a_n)$. Por el principio del producto, el número de funciones inyectivas de $A$ en $B$ es $m(m-1)\cdots(m-n+1) = m^{\underline{n}}$. $\square$

# Sumario

- Principio del palomar: si $n$ objetos se distribuyen en $k$ cajas y $n > k$ entonces alguna caja recibe más de un objeto.
- Principio de correspondencia: Si $A \sim B$ entonces $|A| = |B|$.
- Principio de la suma: Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Principio del producto: Si el primer elemento de un par ordenado se puede escoger entre $m$ posibles y para cada elección del primero hay $n$ posibles segundos elementos, el número total de pares que se pueden formar es $mn$.