La Universidad del Zulia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

La Matemática y sus Relaciones con otros Campos del Conocimiento

José Heber Nieto

Maracaibo, Venezuela

Índice General

Prefacio

Esta obra es la edición electrónica de un pequeño libro del mismo nombre, ya agotado, publicado en 1986 por la Facultad Experimental de Ciencias de La Universidad del Zulia. Ha sido preparada por el autor por considerar que aún mantiene vigencia y puede ser útil. El contenido no ha variado, exceptuando la corrección de errores tipográficos y algunas referencias. El germen de las ideas aquí expuestas se halla en una ponencia presentada al *Primer Simposium Nacional sobre Interdisciplinaridad* (celebrado en Maracaibo del 25 al 28 de mayo de 1982) por el profesor Gonzalo Pérez Iribarren y quien esto escribe. En dicha ponencia, titulada *Matemática e Interdisciplinaridad*, se resumían algunas experiencias vividas por ambos durante el desempeño de nuestras actividades matemáticas en diversos ámbitos universitarios latinoamericanos.

Muchos de los conceptos desarrolladas en este trabajo tienen su origen en el constante intercambio de ideas que mantuvimos en aquel tiempo con el profesor Pérez; en particular el apartado *Fisica y Teoría de Probabilidades* se basa en un manuscrito suyo. Me apresuro a advertir, sin embargo, que cualquier posible error es de mi exclusiva responsabilidad.

El profesor Gonzalo Pérez Iribarren falleció en Montevideo, Uruguay, el 25 de agosto de 1998. Deseo expresar aquí mi gratitud por haber podido disfrutar de su amistad, inteligencia y sabíduría, al tiempo que ofrezco la edición electrónica de esta obra como un humilde homenaje a su memoria.

José Heber Nieto Said
Maracaibo, diciembre 1999.

Introducción

La naturaleza de la matemática y de sus relaciones con los demás campos del conocimiento plantea delicados problemas, tanto de carácter filosófico como de orden práctico. Por una parte es evidente la utilidad de la Matemática en los esfuerzos del hombre por comprender y dominar el mundo físico. Los éxitos de los métodos matemáticos en las ciencias físicas han sido continuos y espectaculares, y su aplicación se extiende hoy en día a las ciencias sociales y humanas. Pero al mismo tiempo la Matemática aparenta ser una especie de microcosmos cerrado sobre sí mismo, donde imperan la 1ógica y el rigor y está excluida intencionalmente toda conexión con lo empírico. Ahora bien, si la matemática no fuese más que el estudio abstracto de sistemas formales no interpretados, *la ciencia en la cual no sabemos de lo que estamos hablando ni si lo que decimos es cierto*, según el conocido aforismo de Bertrand Russell, entonces su utilidad para el conocimiento científico del mundo material no resulta fácilmente comprensible. De hecho el poder y alcance de los métodos matemáticos ha despertado el asombro no sólo de filósofos y humanistas, sino también de un gran físico como E. P. Wigner quien ha escrito que la «irrazonable efectividad» de la matemática en las ciencias naturales es un don maravilloso que no comprendemos ni merecemos, y por el cual deberíamos estar agradecidos (Wigner, [21] pág. 1–14).

En realidad, ni siquiera la consistencia interna de la propia matemática está totalmente clara. Es sabido que desde el descubrimiento de las paradojas en las primeras teorías de conjuntos se han sucedido numerosas crisis. Los resultados de Gödel acerca de la imposibilidad de demostrar la consistencia de cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética (salvo que se empleen recursos transfinitos de consistencia más dudosa que la de la propia aritmética) así como toda una serie de trabajos en Lógica matemática que pasan por la demostración de la independencia de la hipótesis del continuo (Cohen, 1963) y la existencia consiguiente de teorías de conjuntos no cantorianas, han tenido gran impacto sobre la filosofía de la matemática y han debilitado los puntos de vista formalistas. La pretensión de alcanzar el rigor absoluto parece no haber sido más que una vana ilusión. La confesión de Bertrand Russel en su libro *My philosophical development* nos muestra un ejemplo ilustrativo del estado de ánimo de muchos matemáticos de su generación: «La espléndida certeza que siempre había esperado encontrar en la matemática se perdió en un laberinto desconcertante» (Russell, [14]).

¿Cuál es entonces la razón de la aplicabilidad de la matemática?

La pregunta es en realidad muy antigua y se han dado innumerables respuestas. Una de las más persistentes a través de los siglos es la creencia en la existencia de una armonía preestablecida entre el mundo material y el pensamiento matemático (o el pensamiento humano, en general). Esta doctrina ha adoptado diversas formas, desde Pitágoras hasta nuestros días, pasando por el racionalismo. El gran matemático David Hilbert, principal representante de la escuela formalista, fue también adherente a la idea de la armonía preestablecida. En todo caso esta postura filosófica deja abierta la pregunta de por qué existe dicha armonía. Algunos autores han sostenido puntos de vista *biológicos* según los cuales la adecuación entre la realidad material y el pensamiento humano sería producto de la evolución de la especie. Otra opinión muy interesante mantiene que la matemática es aplicable porque al operar con las cosas de la Naturaleza nos inmiscuímos constructivamente en la realidad, imprimiendo formas constructivas a la experiencia. Esto posibilita a su vez que la experiencia pueda ser expresada mediante las formas de nuestro pensamiento operativo-constructivo, es decir fundamentalmente mediante la matemática (Frey, [5]). También han surgido puntos de vista empiristas según los cuales la matemática sería simplemente una ciencia natural más, cuyos conceptos y métodos provienen de la experiencia y en la cual la consistencia de un sistema axiomático, por ejemplo, debe ser ≪contrastada en la práctica≫ (Lakatos, [9] cap. 2). Algunos matemáticos contemporáneos, en fin, se ubican en posiciones neoplatónicas y ven en las estructuras formales de la matemática sólo el aspecto más superficial de esta ciencia, colocando en primer plano la cuestión del significado (Thom, [17, 18]).

En este trabajo no profundizaremos en los aspectos filosóficos de este problema, salvo por algunas referencias ocasionales. Examinaremos en cambio varios ejemplos históricos que muestran algunas de las formas concretas que han asumido las relaciones entre la matemática y las ciencias físicas. Resultará claro que las formas posibles de interacción son muy variadas y complejas, y en muchos casos inesperadas. Apoyándonos en los ejemplos presentados abordaremos luego los problemas planteados por la matematización de otros campos del conocimiento, tratando de encontrar semejanzas y diferencias con lo ocurrido en el campo de las ciencias físicas. Más en general trataremos de describir el rol de la matemática y los matemáticos en la investigación interdisciplinaria, extrayendo conclusiones de orden práctico. Por último haremos algunas reflexiones acerca de la investigación matemática y de los diversos factores que afectan el desarrollo de esta ciencia.

La matemática en la antigüedad

La matemática ha mantenido durante toda su larga existencia relaciones fructíferas con las más diversas actividades humanas. Las operaciones elementales de contar y medir así como el empleo de signos para representar cantidades de objetos y su utilización para efectuar operaciones de adición y sustracción aparecen ya en los tiempos prehistóricos. La misma escritura parece haber nacido gradualmente a partir de la representación de cantidades mediante signos. Los sumerios desarrollaron ya habilidades matemáticas considerables (incluyendo la creación de un sistema de numeración sexagesimal) que aplicaron fundamentalmente en astronomía, llegando incluso a realizar predicciones a partir de los datos que acumularon sobre el movimiento de los astros. La división de la circunferencia en 360 partes iguales (motivada en la duración de 360 días que atribuyeron al año solar) se ha conservado, transmitida por los griegos, hasta nuestros días.

En Egipto la determinación precisa del año solar y la elaboración de calendarios tenían sin duda gran importancia para poder saber cuándo se produciría la crecida anual del Nilo. Por otra parte, si nos atenemos al testimonio de Herodoto, la geometría nació en Egipto debido a la necesidad de medir la tierra (y de allí su nombre griego) provocada por la reforma agraria y tributaria del faraón Sesostrìs. Sin duda que también fueron necesarios conocimientos geométricos para poder construir pirámides y templos de acuerdo a los preceptos religiosos.

Con los griegos los conocimientos matemáticos empíricos de egipcios y babilonios adquirieron un carácter más abstracto y racional. Los griegos tienen el mérito de haber introducido el método deductivo en la matemática, al tiempo que crearon un extraordinario cuerpo sistemático de conocimientos geométricos. Aunque el desprecio de que eran objeto los artesanos (consecuencia de una organización social basada en la esclavitud) creó una brecha entre la ciencia y la técnica griegas, surgió sin embargo la idea de que el mundo físico puede ser entendido por medio de la matemática. Así, para los pitagóricos, todo lo que existe participa del número y su esencia: el número infunde conocimiento y es incompatible con la falsedad. Estas ideas se reflejan posteriormente en el Timeo, de Platón, al crear el demiurgo los cuerpos a partir de formas geométricas elementales, y haciendo corresponder el tetraedro, el cubo, e octaedro y el icosaedro a los cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua. Digamos además que la construcción de los cinco poliedros regulares (a saber los cuatro mencionados más el dodecaedro, que para Platón era una forma que envolvía a todo el universo) constituiría más tarde la meta final de los monumentales *Elementos* de Euclides.

Arquímedes

Para los propósitos de esta obra, difícilmente encontraremos en la antigüedad un pensador más importante que Arquímedes. Además de ser un gran matemático Arquímedes fundó la estática y la hidrostatátíca. Aplicó la matemática al estudio de problemas técnicos, entre ellos el funcionamiento de las maquinas simples. Parece ser que sus hallazgos científicos encontraron aplicaciones prácticas en su tiempo, por ejemplo en la construcci6n de máquinas bélicas o en la determinación de la proporción de oro y plata en una aleación. En matemáticas demostró varios teoremas notables sobre áreas y volúmenes: obtuvo el área del segmento parabólico, el volumen de la esfera, etc. Pero durante muchos siglos el método por el cual había llegado a descubrir sus resultados constituyó un enigma. En efecto, el método de exhaución que empleó en sus demostraciones requiere que de alguna manera se conozca de antemano el resultado que se desea demostrar. En otras palabras este método, debido a Eudoxo, es un método demostratívo pero no de descubrimiento. El enigma se aclaró recién en 1906 cuando se descubrió en un antiguo palimpsesto una obra de Arquímedes hasta entonces desconocida. En ella su autor expone un método basado en la estática para descubrir resultados relativos a áreas y volúmenes. El trabajo fue enviado a Eratóstenes, acompañado de una carta en la cual Arquímedes aclara la significación que atribuía a su método: ≪(...) he creído conveniente exponerte por escrito e ilustrarte en este libro la particularidad de un método según el cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido de que será útil para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo (...) estoy convencido también de la utilidad que puede aportar a la matemática. Pues supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores podrán encontrar, por este método, otros teoremas que a mí no se me han ocurrido todavía.≫ (Arquímedes, [1] páginas 34 y 35).

Lamentablemente la obra se perdió; de otro modo seguramente habría tenido una gran influencia en el desarrollo y evolución posterior de la matemática.

Este ejemplo nos muestra que ya en la antigüedad existieron interacciones entre matemática y física que resultaron enriquecedoras para ambas ciencias: Arquímedes no se limita a aplicar la matemática a la física, sino que también encuentra en esta última ideas y modos de pensar que le permiten obtener nuevos resultados matemáticos. Transcurrieron siglos antes de que algo semejante volviese a presentarse.

Kepler

A partir del Renacimiento asistimos a la vinculación cada vez más estrecha entre Matemática y Ciencias de la naturaleza. Leonardo da Vinci es uno de los primeros en reconocer en la matemática un medio insustituible para expresar las leyes de la naturaleza y para deslindar la ciencia de la sofística. Así afirma que «Quien rehúse a la suprema certeza de la matemática nutrirá su espíritu de la confusión y jamás podrá imponer silencio a los sofismas, los cuales sólo conducen a interminables disputas en torno a palabras» (citado por Cassirer en [2] p. 295). Pero es en Kepler y su trabajo sobre las órbitas planetarias donde encontramos uno de los primeros frutos importantes de las nuevas concepciones. Como se sabe, tanto el antiguo sistema geocéntrico ptolemaico como el nuevo sistema copernicano basado en órbitas circulares permitían predecir los movimientos de los planetas con un margen de error tolerable. Sin embargo los instrumentos perfeccionados de Tycho Brahe y sus cuidadosas observaciones (las cuales incluían correcciones de los efectos producidos por la refracción atmosférica, estimación de errores, etc.) permitieron posteriormente a Kepler hallar una discrepancia de unos ocho minutos de arco en la órbita calculada para Marte. Este error no podía atribuirse a imprecisión en los datos de Tycho Brahe, y condujo a Kepler al abandono de la hipótesis de circularidad de las órbitas, liberándose así de la *obsesión de circularidad* que nadie había podido romper desde los griegos, y a la cual no escapó ni el mismo Galileo. Kepler ensayó entonces algunas curvas ovaladas que le resultaron matemáticamente intratables. Finalmente adoptó la elipse, curva que había sido estudiada extensamente por los matemáticos griegos y en particular por Apolonio de Pérgamo en el siglo II a. C., y formuló sus dos primeras leyes: los planetas se mueven en elipses, con el sol ocupando uno de los focos; los radios que unen el sol al planeta barren áreas iguales en tiempos iguales. Estas leyes, publicadas en su *Astronomía Nova* en 1609, son complementadas diez años después con la tercera: los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol. Esta manera de aproximarse a la realidad, mediante hipótesis matemáticas y conceptos geométricos era resistida por muchos pensadores contemporáneos de Kepler. Robert Fludd, por ejemplo, sostenía que la naturaleza debe ser captada *directamente* y no partiendo de abstracciones del pensamiento (como los conceptos matemáticos) que no permiten adentrarse en el verdadero ser de las cosas. A esto responde Kepler confesando que efectivamente él ignora el *puro interior* de las cosas, a menos que se lo revelen sus relaciones y cualidades, y en particular las relaciones de cantidad. Y agrega: «Yo agarro, como tú dices, la realidad por la cola, pero la tengo en la mano; tú aspiras, es cierto, a agarrarla por la cabeza, pero solamente en sueños» (*Apologia adversus Rob. de Fluctibus*, 1622). Esta polémica es representativa de las dificultades que tuvieron que vencer las nuevas concepciones científicas al enfrentarse a las concepciones del mundo aristotélico-escolásticas.

Galileo, Newton y la nueva Física

Con Galileo asistimos indudablemente al nacimiento de la física moderna. A partir de su obra las relaciones entre matemática y física se vuelven más profundas y orgánicas. Galileo creía de modo espontáneo en la existencia de una correspondencia perfecta entre matemática y realidad. Para él, «el libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de la matemática». Pero tengamos en cuenta que Galileo acota su campo de investigación muy precisamente, reduciéndolo al de las *cualidades primarias* de los cuerpos, es decir aquellas que como la forma geométrica, el tamaño, la posición y la cantidad de movimiento son susceptibles de determinabilidad matemática. Estas son las que considera propiedades objetivas de los cuerpos, mientras que las cualidades sensibles (como el color, sabor y olor) las considera de carácter subjetivo. «Suprimamos mentalmente los cuerpos vivos y sus órganos y desaparecerá simultáneamente el mundo de las cualidades sensibles», escribe en *Il Saggiatore*. Más tarde Newton coincidirá con Galileo en que el objeto de la física debe limitarse a las cualidades primarias de los cuerpos. Estos puntos de vista hallan su expresión filosófica en la doctrina cartesiana de la *res extensa*. Para Descartes, la cualidad esencial del mundo físico es la extensión. Y siendo la extensión mensurable y matematizable, es posible por tanto una *Mathesis universalis*. Como vemos estas ideas asignan a la matemática un papel fundamental en el estudio del mundo físico, e influyen poderosamente en su desarrollo. Newton crea su *método de fluxiones* (cálculo infinitesimal) a partir de motivaciones en gran parte mecánicas. Y a su vez aplica con éxito el nuevo método a diversos problemas físicos. Es curioso que en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* no utilice el método de fluxiones y prefiera presentar los resultados al modo geométrico clásico, pero es sabido que los resultados fueron hallados originalmente por el método de fluxiones, y luego reformulados en el estilo tradicional. Esto nos recuerda a Arquímedes y sus trabajos sobre áreas y volúmenes, quien también utilizó métodos de exposición y de descubrimiento diferentes. Señalemos también que a partir de los principios físicos establecidos por Newton éste logró deducir matemáticamente las órbitas elípticas de Kepler (sin tomar en consideración, naturalmente, las interacciones gravitatorias entre planetas, que hacen que las leyes de Kepler no se cumplan estrictamente). De esta manera las secciones cónicas estudiadas por los griegos vuelven a jugar un papel importante en la historia de la ciencia.

Aplicaciones del cálculo

Durante los dos siglos siguientes a su nacimiento el cálculo diferencial e integral de Newton y Leibniz encontró innumerables aplicaciones a todo tipo de problemas físicos. A su vez la física motivó el desarrollo de nuevos conceptos y métodos matemáticos, como por ejemplo el cálculo de variaciones, las series de Fourier y el análisis vectorial. Es interesante notar que en algunos casos la física no só1o planteó problemas matemáticos, sino que también ayudó a resolverlos. Un ejemplo muy hermoso de esto lo encontramos en el problema de la *braquistócrona*, resuelto por Juan Bernoulli. Este problema consiste en hallar una curva en un plano vertical que una dos puntos O y P. de tal manera que un punto material, moviéndose sobre]a curva sin fricción, descienda de O a P en el menor tiempo posible. Esta curva fue llamada *curva del más rápido descenso* o *curva de descenso en tiempo mínimo* y de allí su nombre de etimología griega: braquistócrona. Observemos que si bien la línea recta entre 0 y P es la de menor longitud. no es sin embargo la de menor tiempo de descenso. Para resolver el problema consideremos un sistema de ejes cartesianos con origen en el punto O, eje Oy vertical dirigido hacia abajo y eje Ox horizontal. Si la partícula parte del origen O con velocidad nula, entonces su velocidad en cualquier punto de la trayectoria será $v = \sqrt{2gy}$, fórmula que se deduce de la ley de conservación de la energía y que Bernoulli conocía perfectamente. Esto lo llevó a relacionar el problema con la óptica: un rayo de luz que pasa de un medio a otro en el cual la velocidad de propagación es distinta, cambia de dirección. Si la velocidad de propagación varía de modo continuo, la trayectoria del rayo será curva. Pero también era conocido el principio de Fermat, según el cual la trayectoria seguida por un rayo de luz es tal que el tiempo empleado para ir de un punto a otro sea mínimo. Esto significa que si tuviésemos un medio transparente en el cual la velocidad de propagación de la luz variase de acuerdo con la ley $v = \sqrt{2gy}$ podríamos utilizar rayos de luz para resolver experimentalmente el problema de la braquistócrona. En realidad Bernoulli no intentó realizar el experimento, sino que a partir de este punto aplicó sus conocimientos matemáticos: llamando α al ángulo de la tangente a la curva con el eje Oy, una pequeña generalización de la ley de refracción de Snell a medios continuos nos da la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = k \quad \text{(constante)}$$

Por otra parte si β es el ángulo de la tangente a la curva con el eje Ox tenemos $y' = \operatorname{tg}\beta$ y por lo tanto

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}.}$$

Combinando esta ecuación con la anterior se llega a la ecuación diferencial:

$$y(1+(y')^2) = c \quad \text{(constante).}$$

La solución de esta última ecuación no ofrecía ninguna dificultad a Bernoulli. Las soluciones son *cicloides* (curvas generadas por el movimiento de un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una recta). Es interesante mencionar que esta curva ya había recibido el nombre de *tautócrona* como resultado de los estudios sobre péndulos y medida del tiempo, los cuales habían mostrado que el péndulo cicloidal tiene un período independiente de la amplitud de las oscilaciones.

La solución de Bernoulli al problema de la braquistócrona posee una gran belleza, debido quizás al contacto inesperado entre dos ramas de la física (la mecánica y la óptica) por intermedio de un mismo modelo matemático. Este problema y otros semejantes tuvieron enorme importancia para el desarrollo posterior de la Matemática y de la Física. Condujeron al Cálculo de Variaciones, que desarrollarían Euler, Lagrange y otros, y a la fundamentación de la Mecánica sobre principios variacionales.

Física y Teoría de Probabilidades

La Teoría de Probabilidades se desarrolló, como es sabido, a partir del estudio de los problemas planteados por los juegos de azar. En sus comienzos grandes matemáticos se ocuparon de ella, como Pascal, Bernoulli y Laplace. Sin embargo pronto se hizo evidente que esta teoría tendría gran importancia en Física. Galileo realizó algunas consideraciones sobre los errores en las medidas que en cierta forma preanuncian la distribución normal de Gauss. Laplace publica en 1812 su obra *Teoría Analítica de las Probabilidades* en la cual escribe proféticamente: ≪Es notable que una ciencia que comenzó con la consideración de juegos de azar habría de llegar a ser el objeto más importante del conocimiento humano≫. De hecho, hoy en día la Probabilidad y su vástago la Estadística ocupan un lugar central en todas las ciencias,

Una de las primeras aplicaciones espectaculares de la Teoría de Probabilidades en Física fue llevada a cabo por James Clerk Maxwell. En una conferencia pronunciada ante la London Chemical Society en 1875 afirma que ≪[Clausius] abrió un nuevo campo a la física matemática... porque siguiendo su método, que es el único posible experimental o matemáticamente, pasamos de los métodos de la dinámica estricta a aquellos de la estadística y la probabilidad≫ (Kuznesov, [8]). Luego, refiriéndose a las moléculas de un gas en equilibrio térmico, afirma que las velocidades de las mismas deben estar distribuidas de acuerdo con alguna ley definida. Esta ley es la *distribución de Maxwell*, como se llama desde entonces. Un hecho interesante es que Maxwell formuló la hipótesis de que las tres componentes de la velocidad de las moléculas respecto de cualquier sistema de ejes cartesianos eran independientes y con valor esperado nulo. Esta hipótesis permite concluir que la distribución de velocidades debe ser normal; sin embargo la matemática de la época no estaba preparada aún para suministrar la demostración. Recién M. Kac en 1940 y S. Bernstein en 1941 hicieron algunos avances en ese sentido, y no es sino hasta 1954 cuando se publica un trabajo de V. P. Skitovic [15] que resuelve con toda generalidad el problema. El teorema en cuestión es el siguiente:

> Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, y sean $Y_1 = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$, $Y_2 = b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n$, con todos los coeficientes a_i y b_i no nulos. Si Y_1 e Y_2 son independientes, entonces las X_i se distribuyen normalmente.

De aquí se deduce la distribución de Maxwell partiendo de sus hipótesis. En efecto si X_1, X_2, X_3 son las velocidades respecto a un sistema de ejes e Y_1, Y_2, Y_3 respecto a otro con el mismo origen y tercer eje coincidente (pero los otros dos no) se deduce que X_1, X_2 tienen distribución normal y por simetría también X_3.

Como vemos los problemas matemáticos planteados por la hipótesis de independencia de Maxwell tardaron más de tres cuartos de siglo en resolverse satisfactoriamente. Esto no detuvo por supuesto el trabajo de los físicos, quienes aceptaron la distribución de Maxwell por razones de tipo físico y experimental.

Luego de Maxwell, Boltzmann y Gibbs harían contribuciones importantes a la mecánica estadística. Sin embargo algunos resultados de Gibbs quedan incompletos, quizás porque como dice N. Wiener ≪la introducción de la probabilidad por Gibbs en física ocurrió bastante antes de que existiera la teoría de probabilidades que él necesitaba≫. Esta opinión llama nuestra atención sobre el hecho de que, en algunos casos, el aparato matemático necesario para una determinada aplicación no existe; y crearlo no siempre es cosa fácil ni que pueda ser realizada de un día para el otro.

Predicciones de existencia

El rol desempeñado por la matemática en las ciencias físicas se revela del modo más dramático en las predicciones teóricas de la existencia de objetos o fenómenos nunca observados. Cuando posteriormente las predicciones resultan confirmadas por la observación, no es posible dejar de maravillarse por el poder casi mágico de nuestras herramientas formales. Uno de los ejemplos más famosos lo constituye sin duda la proeza de Adams y Le Verrier al deducir, a partir de las anomalías observadas en la órbita de Urano, la existencia de un nuevo planeta (Neptuno) llegando a calcular incluso su masa y su órbita. Luego el astrónomo Galle ubicó el planeta en los cielos, con su telescopio, a menos de un grado de diferencia de la posición indicada por Le Verrier. Refiriéndose a este descubrimiento Arago pronunció las siguientes palabras: ≪Le Verrier ha apercibido el nuevo astro sin haber tenido necesidad de arrojar una sola mirada hacia el cielo; lo ha visto en el extremo de su pluma≫.

Otro ejemplo fascinante lo hallamos en la teoría del campo electromagnético de Maxwell. Este gran físico realizó una síntesis de los conocimientos existentes en su época sobre electricidad y magnetismo, formulando unas ecuaciones que describen completamente la estructura del campo electromagnético. Partiendo de sus ecuaciones es posible deducir, mediante manipulaciones formales, que el campo electromagnético satisface la ecuación de las ondas.

En efecto, las ecuaciones de Maxwell en el vacío son las siguientes:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\\ a\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{B}\\ b\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

siendo $\mathbf{E}$ el campo eléctrico, $\mathbf{B}$ el campo magnético y a y b constantes que dependen de las unidades de medida que se adopten. A partir de las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{a}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{ab}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

y usando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\Delta\mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ y la primera ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, resulta entonces que $\mathbf{E}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{ab}\Delta\mathbf{E},$$

que es la ecuación de las ondas. Del mismo modo se prueba el resultado correspondiente para $\mathbf{B}$.

De esta manera Maxwell llegó a la conclusión de que debían existir ondas electromagnéticas, predicción que fue confirmada en 1886 por Hertz quien escribió maravillado; ≪No puede uno evitar el sentimiento de que estas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia propia, que son más sabias de lo que somos nosotros, más sabias incluso que sus propios descubridores≫.

Estas mismas ecuaciones de Maxwell jugarían luego un papel importante en el nacimiento de la teoría de la relatividad debido al hecho (también formal) de no ser invariantes bajo las transformaciones galileanas, pero serlo en cambio bajo las transformaciones de Lorentz-Einstein,

En la física de partículas también existen predicciones notables de este tipo. La teoría matemática de los grupos fue empleada por Gell-Mann y Ne'eman para formular la así llamada *teoría del camino óctuple*. Esta teoría permitió a Gell-Mann predecir la existencia de un nuevo barión, que él llamó Ω^-. Más tarde, en 1964, esta partícula fue observada en las fotografías obtenidas en una cámara de niebla.

Química y Biología

No nos detendremos aquí a analizar detalladamente las relaciones de la Matemática con estas ciencias. Digamos sin embargo que en general han sido de carácter más unilateral, es decir de pura aplicación, que las existentes entre matemática y física. En el caso de la Biología existen problemas que han contribuido al desarrollo de ciertas ramas de la matemática; es el caso de la genética de poblaciones y los modelos probabilísticos diseñados para combinar las leyes de la herencia con el azar. Es de esperar que en el futuro las necesidades específicas de estas ciencias contribuyan a la aparición de nuevas teorías matemáticas. En todo caso es aún muchísimo lo que la matemática clásica puede aportar a las ciencias biológicas y a la medicina.

Ciencias sociales y humanas

En las últimas décadas también en estas ciencias se ha operado un proceso de matematización creciente. Además de las aplicaciones de la Teoría de Probabilidades y de la Estadística en la investigación experimental, se emplean diversas técnicas matemáticas en Economía, estructuras algebraicas en Lingüística y Antropología, estructuras algebraicas, topológicas y de orden en el estudio del desarrollo de la inteligencia (Piaget), la teoría de catástrofes de R. Thom en diversas ciencias, modelos matemáticos en teoría de la comunicación, etc. También se aplican disciplinas y teorías que sin ser parte de la matemática tienen un fuerte componente de esta ciencia. Nos referimos por ejemplo a la cibernética, la teoría general de sistemas, las ciencias de la computación, etc. (véase [10] para un panorama más amplio).

En muchas ocasiones sin embargo se hacen matematizaciones banales, que no resuelven problemas ni ayudan a la mejor comprensión de los mismos. Si bien estas desviaciones difícilmente pueden afectar de modo más o menos permanente el desarrollo de la ciencia, sí pueden desanimar a los investigadores respecto a las posibilidades de los métodos matemáticos en su área específica de trabajo. Sobre este particular no podemos resistir la tentación de citar a Popper, quien ha escrito en forma inspirada:

> ≪En nuestra época postrracionalista se escriben libros y más libros en lenguajes simbólicos, y se hace más y más difícil el ver por qué—qué es lo que se trata con todo ello, y por qué habría de ser necesario, o conveniente, permitir que le aburran a uno tomos y tomos de trivialidades simbólicas—. Parece como si el simbolismo se estuviese convirtiendo en un valor por sí mismo, que hubiera de reverenciar por su *exactitud* suprema: una nueva expresión de la antigua búsqueda de la certeza, un nuevo ritual simbólico, un nuevo sustituto de la religión.≫
> (Popper, [12] página 366 de la versión española.)

Como ya hemos visto, el propio objeto de estudio de la ciencia física, su desarrollo histórico paralelo al de la matemática, el estrecho entretejido de conceptos y teorías de ambas ciencias y en fin el largo camino recorrido desde los albores de la civilización hasta nuestros días permiten a estas dos ciencias multiplicar sus relaciones y fecundarse mutuamente. En otras ciencias naturales, como la Biología, se encuentran al menos sistemas conceptuales muy precisos, elaboradas taxonomías de los objetos de estudio y procedimientos metodológicos bien definidos. Esto abona el terreno para la aplicación de los recursos matemáticos. Otra es la situación en ciencias más jóvenes, en las cuales muchas veces se manejan conceptos no suficientemente precisos y se realizan clasificaciones ambiguas o artificiales. En estos casos la posibilidad de aplicar técnicas matemáticas enfrenta serios obstáculos, por no haberse cumplido etapas de maduración imprescindibles. Esto no significa que la matemática no pueda ofrecer ninguna contribución a estas ciencias; por el contrario creemos que, principalmente a través de un enfoque interdisciplinario, es posible un aporte conceptual y metodológico al proceso de maduración de muchas disciplinas. Esto exige, tanto de parte de los matemáticos como de los demás científicos, un espíritu abierto y humilde y un verdadero deseo de trabajar en favor del desarrollo global de la ciencia.

Las formalizaciones artificiales

El innegable éxito de los métodos matemáticos en las ciencias naturales ha hecho pensar a muchos que únicamente a través de la matemática es posible alcanzar la certeza y la corrección. Este pensamiento toma expresión filosófica en Kant, cuando afirma que «en cualquier teoría sobre la naturaleza se encuentra tanto de verdadera ciencia, cuanto en ella se encuentra de matemática» (*Fundamentos metafísicos de las ciencias de la naturaleza*, VII). No entraremos a discutir esta idea (lo cual en todo caso habría que hacer tomando en cuenta el contexto del sistema kantiano, en el cual la matemática es concebida esencialmente como el modo de describir las cosas y los sucesos sujetos al espacio y al tiempo) pero sí deseamos observar que puede conducir a un grave error, como es el creer que por el sólo hecho de introducir métodos o formalismos matemáticos en una determinada disciplina se alcanzará un grado de conocimiento más elevado, una garantía de certeza y exactitud. Debería ser obvio que si se desarrolla un modelo matemático estableciendo correspondencias arbitrarias entre sus elementos ideales y los objetos reales de estudio, no cabe esperar que la matemática luego sea capaz de obrar milagros.

Cuando en mecánica clásica se representan las velocidades mediante vectores, se debe a que la operación formal de sumar vectores, por ejemplo, corresponde a la ley física de composición de velocidades. Del mismo modo la utilidad de la ecuación de una reacción química como $6\ HCl + 2Al = 2AlCl_3 + 3\ H_2$ es consecuencia de que el formalismo utilizado realmente refleja ciertas leyes de la química (las de Lavoisier, Proust, Dalton, Avogadro, etc.) y permite, por lo tanto, extraer conclusiones cuantitativas válidas.

Cuando en cambio se hacen formalizaciones que carecen de este componente vital, el valor explicativo, predictivo o instrumental de los modelos se vuelve nulo. De hecho existe un gran peligro: a veces partiendo de una de estas formalizaciones artificiales se extraen conclusiones y se pretende que están «matemáticamente fundamentadas». Este es el caso con muchos modelos matemáticos del comportamiento social o económico, que suelen ocultar la endeblez de sus supuestos básicos bajo el manto de sofisticadas técnicas matemáticas o computacionales.

La medida de la inteligencia

Debido a la gran dificultad de definir con precisión el concepto intuitivo de inteligencia, muchos psicólogos (comenzando por Binet) han intentado dar definiciones operacionales, diseñando *tests* y midiendo la inteligencia por medio de ellos. De esta manera a cada persona se le asigna un número (que en definitiva depende del criterio de quien diseñó el test) y se le clasifica de acuerdo al mismo. No deseamos aquí cuestionar la validez de estos recursos y técnicas de la psicología experimental. Sin embargo observemos cuan fácil y hasta natural resulta efectuar operaciones con los coeficientes de inteligencia y extraer engañosas conclusiones. Por ejemplo si aceptamos que el C. I. realmente representa la habilidad de un individuo para resolver cierto tipo de problemas, ¿qué representa el promedio de los C. I. de un grupo humano? ¿Representa acaso la habilidad del grupo para resolver problemas colectivamente? En nuestra opinión, debería ser evidente que no es así. Sin embargo es bastante corriente aceptar implícitamente, sin análisis crítico, extrapolaciones injustificadas y falsas obtenidas a partir de modelos cuya estructura interna no guarda correspondencia adecuada con la realidad a la cual pretende aplicarse. De esta manera se presentan como opiniones «científicas» lo que no son más que groseros prejuicios ideológicos, políticos o raciales.

Baste como ejemplo de lo dicho la propuesta de William Shockley de esterilizar a los negros norteamericanos sobre la base de su «inferioridad intelectual», supuestamente revelada por los tests de inteligencia (véase Vloebergh, [19]).

Matemática e interdisciplinaridad

El concepto de interdisciplinaridad abarca en verdad muchos significados y matices diferentes. La idea común es la del contacto entre disciplinas diferentes, o incluso entre distintas ramas de una misma disciplina, ya sea para resolver un problema concreto, para comparar distintos enfoques y metodologías aplicados a una misma situación, o bien en algunos casos para crear nuevas disciplinas. Ya hemos visto como en la solución del problema de la braquistócrona participan la mecánica y la óptica, estableciéndose el contacto por medio de la matemática. Ejemplos como éste se encuentran a menudo, cada vez que a fenómenos diferentes corresponden representaciones matemáticas semejantes o incluso idénticas. El movimiento de una masa que cuelga de un resorte, por ejemplo, se describe mediante una ecuación diferencial de segundo orden del mismo tipo que la que rige el comportamiento de un circuito eléctrico L-R-C. Contactos de este tipo son de una gran importancia en la práctica. Permiten resolver problemas de hidráulica o aerodinámica estudiando circuitos eléctricos equivalentes, los cuales son mucho más fáciles de construir, manipular y modificar. Esta es la base de las computadoras analógicas.

Otro tipo importante de esfuerzos interdisciplinarios son aquellos que han conducido al nacimiento de nuevas ramas del conocimiento científico. Durante la segunda guerra mundial el matemático Norbert Wiener tuvo a su cargo un proyecto destinado a desarrollar sistemas de control para ser usados por la artillería antiaérea. Como consecuencia de una consulta hecha a un fisiólogo, el Dr. Rosenblueth, se generó un fructífero intercambio de ideas que condujo a la realización de experimentos conjuntos. El alcance de las investigaciones se amplió rápidamente y otros científicos se unieron al grupo inicial. entre ellos los matemáticos John von Neumann y W. Pitts, los fisiólogos Mc Culloch y Lorente de No, el psicólogo Kurt Lewin, los antropólogos G. Bateson y Margaret Mead, el economista Oscar Morgenstern y varios ingenieros, físicos, sociólogos, neurofisiólogos, etc. De allí nació la cibernética, disciplina que no tardaría en extender su esfera de influencia a los más diversos campos.

El propio Wiener aclara su punto de vista respecto a la investigación interdisciplinaria en los siguientes términos:

> ≪Durante muchos años ambos compartimos—se refiere al fisiólogo Rosenblueth—la idea de que las áreas en las que las ciencias podían realizar progresos más importantes eran precisamente aquellas que habían sido dejadas de lado, como 'tierras de nadie', entre campos científicos perfectamente delimitados. Rosenblueth había insistido siempre en el hecho de que una exploración adecuada de estos espacios vacíos del mapa de la ciencia solamente podría ser realizada por un equipo de científicos, cada uno de los cuales fuese un especialista en su materia y estuviese, además, en posesión de un conocimiento bastante amplio de los campos de trabajo de sus compañeros.≫
> (Wiener, [20]).

Otro ejemplo de características semejantes lo encontramos en la Teoría de Juegos, desarrollada a raíz de la colaboración entre John von Neumann y Oscar Morgenstern en torno al problema de la toma de decisiones en situaciones conflictivas. También la Investigación de Operaciones es el fruto del trabajo de un equipo interdisciplinario durante la segunda guerra mundial. Media docena de científicos de diversas disciplinas fueron convocados por el gobierno inglés para estudiar el mejor método de defensa contra los bombardeos alemanes, con los recursos disponibles. El éxito de las técnicas emanadas de este grupo fue tal que se aplicaron de inmediato a muchos otros problemas bélicos (detección de submarinos, profundidad óptima para las cargas de profundidad, tácticas de defensa de los barcos frente a los kamikazes japoneses, etc.) y después de la guerra a problemas económicos.

En un plano más cotidiano, los matemáticos participan de diversas maneras en toda clase de equipos interdisciplinarios dedicados a la investigación científica, ya sea ésta básica o aplicada. Es preciso reconocer que este proceso no está libre de dificultades y obstáculos. Es sabido que muchos matemáticos, aún teniendo buena voluntad y disposición para el trabajo en equipo, encuentran serias dificultades de comunicación con los representantes de otras disciplinas. Esto no se debe tanto a la carencia de un lenguaje común corno al hecho de que, debido al tipo de entrenamiento recibido, el matemático trabaja con conceptos muy precisamente delimitados y se le hace difícil aceptar los planteamientos más o menos vagos comunes en otros campos. Así por ejemplo se apresurará a decir que determinado problema no tiene solución, o que no está correctamente formulado para ser analizado matemáticamente; y probablemente tendrá razón, pero sin tener en cuenta que pueden existir condiciones o hipótesis implícitas o sobreentendidas en el problema real, que los especialistas de otras disciplinas quizás consideren obvias y no se molesten en aclarar. Esto también conduce a veces a soluciones correctas matemáticamente pero carentes de sentido físico, o irrealizables por motivos prácticos. Estas dificultades naturalmente sólo logran resolverse a la larga mediante el trabajo conjunto, y son apenas un pequeño precio a pagar a cambio de grandes beneficios.

Matemática pura vs. matemática aplicada

Según la tradición, cuando uno de sus discípulos preguntó a Euclides ≪¿Qué ganaré aprendiendo estas cosas?≫, Euclides llamó a su esclavo y le ordenó ≪Dadle una moneda, ya que desea ganar algo con lo que aprende.≫

Este relato nos muestra la existencia de dos puntos de vista extremos y antagónicos respecto de la matemática. Para uno de ellos, la matemática sólo se justifica por sus aplicaciones, por su carácter utilitario. Para el otro, la matemática es valiosa en sí misma, independientemente de cualquier aplicación: es una forma de arte. Una de las más célebres polémicas entre estas dos concepciones tuvo lugar en 1830 entre Fourier y Jacobi. El primero de ellos, autor de la famosa *Teoría analítica del calor*, no sentía gran aprecio por las investigaciones matemáticas que consideraba demasiado teóricas y alejadas de la realidad. En un informe que presentó a la Academia de Ciencias de París sobre los trabajos de Jacobi y Abel en la teoría de funciones elípticas se lamentaba de que científicos tan valiosos dedicasen su tiempo a esas especulaciones teóricas. Jacobi, por su parte, pensaba que el objetivo de la ciencia era únicamente *el honor del espíritu humano*. La polémica se vió interrumpida por la muerte de Fourier, pero el tiempo se encargaría de mostrar las limitaciones de ambas posiciones, al encontrar los trabajos de Jacobi aplicaciones prácticas y los de Fourier importantísimas consecuencias teóricas.

Hoy en día la interdependencia entre teoría y aplicaciones es total. Los ejemplos históricos que muestran lo ilusorio de separar lo *puro* de lo *aplicado* también son muchos. Hemos visto por ejemplo cómo Kepler aprovechó la teoría de las secciones cónicas de Apolonio. Del mismo modo la teoría de grupos, que tiene su origen en los trabajos *puros* de Galois sobre la resolubilidad de ecuaciones algebraicas por radicales, encontraría luego aplicaciones en química, mecánica cuántica, física de partículas, etc.

El aparato matemático utilizado por Einstein en su teoría general de la relatividad es también el resultado de una larga evolución teórica de la geometría, que pasa por la teoría de superficies de Gauss, las geometrías no euclidianas, la geometría de Riemann y los trabajos de Ricci y Levi-Civitta sobre lo que hoy en día llamamos cálculo tensorial. Todos estos desarrollos teóricos estaban, en su origen, firmemente ligados a problemas *reales* (esto es, del mundo físico) pero fueron llevados a grados de abstracción y profundidad superiores a las posibilidades de aplicación práctica que tuvieron en su época. Arquímedes pudo quizás haber utilizado la propiedad focal de la parábola para construir espejos parabólicos con los cuales incendiar los navíos romanos que sitiaban Siracusa, sin embargo esta aplicación está muy lejos de agotar el potencial teórico de la obra de Apolonio, que muchos siglos más tarde Kepler encontraría adecuada a sus necesidades. A veces se pretende restar importancia a estas consideraciones. Morris Kline, por ejemplo, afirma en una de sus notas introductorias a una recopilación de artículos de Scientific American ([7] pp. 260 y 261 de la edición en español) que después de todo las elipses no eran las curvas que Kepler necesitaba, puesto que las órbitas de los planetas (debido a las interacciones gravitatorias entre ellos, etc.) no son realmente elipses. Del mismo modo dice que Einstein hizo lo mejor que pudo con el cálculo tensorial, que casi seguramente no era la herramienta más adecuada posible sino tan sólo lo que había disponible. Estas curiosas opiniones, sobre todo proviniendo de un conocedor de la historia de la ciencia como Kline, nos llaman poderosamente la atención. Parecen ignorar totalmente la forma en que se desarrolla el conocimiento científico, criticándose y superándose a sí mismo constantemente. ¿Cómo hemos llegado a saber que las órbitas de los planetas no son exactamente elipses? ¿No es acaso a través de un largo desarrollo, que pasa necesariamente por Kepler y Newton? Por cierto que las teorías físicas son a la larga superadas y sustituidas o absorbidas por otras que las perfeccionan y generalizan. Pero esto no les quita su importancia, por el contrario, las convierte en hitos en el desarrollo histórico del conocimiento.

Creemos que resulta claro, si se examina la historia de la ciencia, que para el propio bien de la ciencia aplicada son necesarias las investigaciones teóricas. El historiador de la ciencia René Taton ha expresado esta idea con las siguientes palabras:

> ≪Si se considera la utilidad como único punto de referencia es indiscutible que los descubrimientos teóricos más fecundos en aplicaciones prácticas han sido a menudo aquellos que en sus orígenes parecían más abstractos, más alejados de la realidad concreta. Las investigaciones teóricas presentan, pues, un interés primordial para el futuro progreso de las ciencias aplicadas.≫
> (Taton, [16] pág. 28.)

En uno de sus brillantes *Diálogos sobre matemáticas* el matemático húngaro A. Rényi pone en labios de Arquímedes las siguientes palabras: ≪...la matemática revela sus secretos sólo a aquellos que se le acercan con puro amor, por su propia belleza. Quienes esto hacen, son también recompensados con resultados de importancia practica. Pero si alguien pregunta a cada paso ¿cómo puedo sacar provecho de esto?, no llegará muy lejos≫ (Rényi, [13]).

La matemática para sí misma

El punto anterior está relacionado con otra cuestión importante de la cual aún no hemos hablado. Se trata del carácter específico de la matemática como ciencia, como sistema de conocimientos estructurado y orgánico. En verdad creemos que gran parte del poder de la matemática es consecuencia de su carácter unitario, que la identifica indubitablemente como una sola ciencia a pesar de los cientos de ramas y subramas que comprende.

Esta unidad se manifiesta dentro de la matemática en los contactos a veces inesperados que suelen establecerse entre ramas aparentemente muy alejadas. Por otra parte plantea ciertas exigencias, que los planificadores y ejecutores de la política científica y tecnológica deberían tomar en cuenta. En primer lugar tenemos la necesidad de la investigación básica. Sin ella no sólo no se producirían nuevos conocimientos, sino que ni siquiera sería posible aplicar los ya existentes. En efecto, los conocimientos matemáticos no se encuentran disponibles para ser usados de inmediato por cualquiera, como las recetas de un libro de cocina. Sólo para comprender, asimilar y posiblemente aplicar cualquier resultado matemático tal como se publican en la literatura especializada, se requiere de matemáticos con experiencia en investigación.

Una segunda exigencia se refiere al desarrollo equilibrado de las distintas ramas que componen el árbol de la matemática. Seria difícil desarrollar una de ellas en un ambiente carente de especialistas en las demás.

Matemática y belleza

La apreciación estética de la matemática es, a no dudarlo, uno de los elementos intrínsecos que más han contribuido a orientar su desarrollo. El gran pensador y matemático Henri Poincaré, en una conferencia pronunciada ante la Sociedad Psicológica de París a comienzos de este siglo, analiza el misterio de la creación en matemáticas y le atribuye un rol singularísimo a la sensibilidad en este proceso (Poincaré, [11]). Por su parte el matemático inglés G. H. Hardy escribió:

> ≪Las configuraciones construidas por un matemático, lo mismo que sucede con las de un pintor o un poeta, deben poseer belleza; las ideas, los colores y las palabras deben ensamblarse de un modo armónico. La belleza es la primera piedra de toque; en el mundo

no hay un lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético.»
(Hardy, [6].)

Agreguemos que el libro citado (*A methematician's apology*) fue recensado por Graham Greene, quien lo consideró, junto a los cuadernos de Henry James, como la mejor descripción de lo que significa ser un artista creador.

Es muy interesante encontrar puntos de vista similares en un gran físico como lo fue Dirac. Comentando el modo como Schrödinger (quien compartió con Dirac el premio Nobel de física en 1933) obtuvo por primera vez su famosa ecuación de ondas, abandonando luego el trabajo por algunos meses debido a que al aplicarla al átomo de hidrógeno los resultados no concordaban con los experimentos, Dirac nos dice que entonces se introdujo una segunda ecuación aproximada y más tosca, que no tomaba en cuenta los refinamientos relativistas de la primera. Sin embargo cuando por fin se descubrió el spin del electrón y la forma correcta de tomarlo en cuenta, la ecuación relativista original reveló su verdadero valor y concordancia con la experiencia. Entonces Dirac extrae la siguiente conclusión:

> «Parece que si uno trabaja desde el punto de vista de obtener belleza en sus propias ecuaciones, y si se tiene realmente una intuición profunda, entonces está en una línea segura de progreso. Si no existe completo acuerdo entre sus resultados y sus experimentos, no se debería permitir desanimarse, porque la discrepancia puede muy bien deberse a características de menor importancia que no se tomaron propiamente en cuenta y que serán aclaradas con ulteriores desarrollos de la teoría.»
> (Dirac, [4].)

En definitiva, creemos que los elementos estéticos, en matemática y en otras ciencias, juegan un rol importante y deberían recibir la atención debida.

A modo de conclusión

Hemos reflexionado acerca de la matemática desde diversos ángulos. Por medio de algunos ejemplos hemos visto cómo influyen sobre su desarrollo las relaciones que mantiene con las otras ciencias y la necesidad de resolver problemas concretos.

Pero la matemática tiene también una *vida interior* que parece desenvolverse de acuerdo con sus propias leyes, y en la cual imperan la belleza y el misterio de la creatividad. De este modo, de ella misma surgen constantemente ideas, problemas y teorías que la enriquecen y expanden sus fronteras.

Creemos que tanto aquellos matemáticos que han desestimado por completo las aplicaciones, poniendo todo su empeño en «crear obras de arte perdurables» (como Hardy, [6]) o persiguiendo fines espirituales superiores (como es el caso de Shafarevitch, véase Davis [3]), como aquellos otros que dotados quizá de una mayor sensibilidad social y menos prejuicios ideológicos han puesto su capacidad al servicio de todo tipo de aplicaciones (como Richard Bellman) han contribuido por igual, en la medida de su talento, al engrandecimiento de la ciencia. Ya hemos mencionado, por otra parte, que frecuentemente los desarrollos más puros encuentran aplicaciones prácticas y los trabajos aplicados abren nuevos campos a la investigación básica. De hecho creemos que ambos aspectos de la matemática, el puro y el aplicado, se conjugan íntimamente y hasta llegan a ser inseparables.

Bibliografía

[1] Arquímedes, *El Método*, Eudeba, Buenos Aires, 1966.

[2] Cassirer, E. *El Problema del Conocimiento*, tomo l, Fondo de Cultura Económica, México, 1953.

[3] Davis, P. J., Hersh, R. *The Mathematical Experience*, Birkhäüser, Boston, l981.

[4] Dirac, P. A. M. *La Evolución de la Imagen del Físico de la Naturaleza*, en [7].

[5] Frey, G. *Der mathematisierung unserer Welt*, Kohlammer Verlag, Stuttgart. Hay traducción: *La matematización de nuestro universo*, G. del Toro, Madrid, l972.

[6] Hardy, G. H. *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1967. Hay traducción: *Autojustificación de un matemático*, Ariel, Barcelona, 1981.

[7] Kline, M. (ed.) *Mathematics in the Modern World*, W. H. Freeman, San Francisco, 1968. Hay traducción: *Matemáticas en el mundo moderno*, Blume, Madrid, 1974.

[8] Kuznesov, B. G. *Maxwell's electrodynamics, its origins, development and historical value*, Trudy Inst. Istor. Estetuoznan Tehn 1955.

[9] Lakatos, I. *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, 1978. Hay traducción: *Matemáticas, Ciencia y Epistemologia*, Alianza, Madrid, 1981.

[10] Messik, D. M. (ed.) *Mathematical Thinking in Behavioral Sciences*, W. H. Freeman, San Francisco, 1968. Hay traducción: *Matemáticas en las Ciencias del Comportamiento*, Alianza, Madrid, 1974.

[11] Poincaré, H. *La creación matemàtica*, en *Ciencia y Método*, Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946 y también en [7].

[12] Popper, K. *La lógica de la investigación científica*, Tecnos, Madrid, 1962.

[13] Renyi, A. *Dialogues on Mathematics*, Holden-Day 1967.

[14] Russell, B. *My philosophical development*, Allen & Unwin, 1959. Hay traducción: *La evolución de mi pensamiento filosófico*, Alianza Editorial, Madrid, 1976.

[15] Skitovic, V. P., Izvestia Acad. Nauk SSSR vol. 18 (1954), 185–200.

[16] Taton, R. *Causalités et accidents de la découverte scientifique*, Masson et Cie., Paris, 1967. Hay traducción: *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos*, Editorial Labor, Barcelona, 1973.

[17] Thom, R. *Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?* L'age de la science 3 (1970), 225–256. Hay traducción: *Matemáticas modernas y matemáticas de siempre*, en *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 1978.

[18] Thom, R. *Mathématiques modernes et mathématiques de toujours*, en *Pourquoi la mathématique?*, R. Jaulin (ed.), Paris, 1974. Hay traducción: *Matemáticas modernas y matemáticas de siempre*, en *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 1978.

[19] Vloebergh, A. *Medidas de la inteligencia: el debate vuelve a la actualidad*, Mundo Científico No. 6 (versión en castellano de La Recherche), 1981.

[20] Wiener, N. *Cybernetics*, Scientific American, **179**(5), nov. 1948, 14–19. Se halla traducido en las referencias [7] y [10].

[21] Wigner, E. P. *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Communications in pure and applied mathematics, Courant Institute, 1960.