CAPÍTULO 1

Conjuntos, Relaciones y Funciones

En este capítulo se revisan los conocimientos básicos sobre conjuntos, relaciones y funciones que son necesarios en matemática discreta y se fija la notación a ser utilizada en el resto del libro. El tratamiento es intuitivo: no se intenta axiomatizar o formalizar la teoría de conjuntos sino más bien describir cómo ésta es utilizada en matemáticas. Hay pocas demostraciones en sentido estricto, pero sí abundantes ejemplos. El lector que esté bien familiarizado con estos temas puede saltar este capítulo y volver a él más tarde si necesita refrescar algún concepto.

1.1. Conjuntos

La Teoría de Conjuntos fue desarrollada inicialmente por el matemático alemán Georg Cantor (1845–1918) a fines del siglo XIX. A pesar de que en sus comienzos fue muy controversial, esta teoría ha llegado a jugar un rol fundacional para la matemática moderna.

Intuitivamente, un *conjunto* es un agregado o colección de objetos de cualquier naturaleza. A dichos objetos se les llama *elementos* del conjunto. Por ejemplo una bandada de aves, todos los libros de una biblioteca, el alfabeto español y los divisores del número cien son conjuntos. No se dará una definición más precisa del concepto de conjunto porque en realidad éste es uno de los conceptos *primitivos* de la matemática, como lo son los conceptos de punto y recta en geometría: el concepto de conjunto puede ser utilizado como punto de partida para definir todos los demás conceptos de la matemática, pero él mismo no se define en términos de conceptos más sencillos.

Si x es un elemento del conjunto A entonces se dice que x *pertenece* a A y se escribe $x \in A$. Si x no es un elemento del conjunto A entonces se dice que x no pertenece a A y se escribe $x \notin A$. Observe que un elemento de un conjunto puede ser él mismo un conjunto. Si todos los elementos de un conjunto $\mathscr{F}$ son conjuntos, se dice que $\mathscr{F}$ es una *familia de conjuntos* y a sus elementos se les llama *miembros* de $\mathscr{F}$.

Definición 1.1.1. Dos conjuntos A y B son *iguales* (o *idénticos*) si tienen exactamente los mismos elementos. En ese caso se escribe $A = B$. De lo contrario se dice que los conjuntos son diferentes y se escribe $A \neq B$.

Observe que dos conjuntos son diferentes si y sólo si existe algún elemento que pertenece a uno de ellos pero no al otro.

Definición 1.1.2. Si todo elemento de A es también elemento de B se dice que A está *incluido* o *contenido* en B, o que A es un *subconjunto* de B y se escribe $A \subset B$. También se dice que B *contiene* a A y se escribe $B \supset A$. Si $A \subset B$ y $A \neq B$ entonces se dice que A es un *subconjunto propio* de B y se escribe $A \subsetneqq B$.

Observe que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$. De hecho para probar que dos conjuntos A y B son iguales generalmente se prueba que $A \subset B$ y luego que $B \subset A$.

Un conjunto puede definirse por *extensión* escribiendo sus elementos entre llaves, separados por comas.

Ejemplo 1.1.3. $\{3, 5, 7\}$ es el conjunto formado por los números 3, 5 y 7.

El *orden* en que se escriben los elementos dentro de las llaves es irrelevante. Por ejemplo $\{3, 5, 7\}$ es idéntico a $\{7, 5, 3\}$, ya que tienen exactamente los mismos elementos.

Definición 1.1.4. El conjunto $\{\}$ no tiene ningún elemento: se le llama *conjunto vacío* y se denota con el símbolo $\varnothing$.

El conjunto vacío puede visualizarse como un continente sin contenido, como una caja vacía. Sin embargo esta analogía no es perfecta, ya que puede haber muchas cajas vacías pero hay un solo conjunto vacío. En efecto, dos conjuntos sin elementos tienen los mismos elementos (es decir, ninguno) y por lo tanto so iguales. Visto de otra forma, no pueden ser diferentes pues para ello debería haber un elemento perteneciente a uno de los conjuntos y no al otro, y eso es imposible pues ninguno de los dos tiene elementos.

Observe que $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A. Esto puede parecer extraño pues si $\varnothing$ no tiene elementos, ¿cómo pueden éstos pertenecer a A? La explicación es que $\varnothing \subset A$ significa que *si* un elemento x pertenece a $\varnothing$, *entonces* x debe pertenecer también a A. Pero como no hay elementos en $\varnothing$, la condición se satisface trivialmente. Visto de otro modo ¿existe algún elemento de $\varnothing$ que no pertenezca a A? Como la respuesta es no, se sigue que $\varnothing \subset A$.

El conjunto vacío puede parecer poro interesante, sin embargo a partir de él se puede construir una infinidad de otros conjuntos. Por ejemplo $\{\varnothing\}$ es un conjunto que tiene a $\varnothing$ como su único elemento. Por lo tanto $\{\varnothing\}$ no es vacío, es decir $\{\varnothing\} \neq \varnothing$. Del mismo modo $\{\{\varnothing\}\}$ no es vacío y es diferente de $\{\varnothing\}$, y así sucesivamente todos los conjuntos de la sucesión $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$,... son diferentes.

Las definiciones por extensión son muy engorrosas para conjuntos con muchos elementos, aunque en algunos casos se pueden usar puntos suspensivos para evitar la escritura de todos los elementos. Por ejemplo el conjunto de los primeros cien números naturales se puede escribir $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, y el de los primeros cincuenta números naturales pares $\{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$. Pero salvo en casos como éstos en los cuales hay un patrón obvio para los elementos, es necesario utilizar un recurso notacional diferente para describir conjuntos con numerosos elementos. La solución son las definiciones por *comprensión*, en las cuales en vez de escribir todos los elementos se proporciona una propiedad que los caracterice. El aspecto general de estas definiciones es $\{x : P(x)\}$, que se lee "el conjunto de todos los x tales que $P(x)$", siendo P una condición que los elementos del conjunto, y sólo ellos, deben cumplir (algunos autores usan una barra vertical '|' en vez de ':' para separar la variable de la condición).

Lamentablemente la condición P no puede ser arbitraria: ya en los inicios de la teoría de conjuntos se advirtió que esto llevaba a contradicciones, la más famosa de las cuales fue descubierta por Bertrand Russell (1872–1970) en 1901 y se conoce como la *paradoja de Russell*: sea $A = \{x : x \notin x\}$, es decir el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Si $A \in A$ entonces A debe cumplir la condición de pertenencia a A, es decir $A \notin A$, mientras que si $A \notin A$ entonces A no cumple dicha condición y

$A \in A$. En ambos casos se llega a una contradicción, producto de haber admitido la existencia de un conjunto definido por la propiedad $x \notin x$. Una variante popular de esta paradoja es la siguiente: en cierto pueblo hay un barbero que afeita a todos los hombres del pueblo que no se afeitan a sí mismos y a ninguno más; ¿quién afeita al barbero?

Para librarse de estas paradojas fue necesario axiomatizar la teoría de conjuntos y restringir la definición de conjuntos por comprensión de la manera siguiente: si A es un conjunto y $P(x)$ una condición que cada elemento x de A puede o no cumplir, entonces el conjunto

$$\{x \in A : P(x)\}$$

está bien definido. En otras palabras, sólo está permitido definir por comprensión subconjuntos de otros conjuntos, y quedan excluidos entes peligrosos como $\{x : x \notin x\}$ o $\{x : x = x\}$. Es obvio entonces que se necesitan algunos conjuntos iniciales con los cuales comenzar a definir otros conjuntos. Entre ellos están los conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$,..., ya mencionados, y los que pueden formarse agrupando varios de ellos, como $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, etc. Otros axiomas permiten crear nuevos conjuntos por medio de ciertos operaciones estándar que se describirán en la próxima sección.

Algunos conjuntos muy usados en matemática tienen nombres especiales, entre ellos $\mathbb{N}$, el conjunto de todos los números naturales 1,2,3,... y $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros (positivos, negativos y 0).

Ejemplo 1.1.5. El conjunto de los números naturales entre 1 y 100 puede describirse por comprensión como

$$\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 100\}.$$

Ejemplo 1.1.6. El conjunto de los cuadrados perfectos entre 1 y 100 puede describirse por extensión como

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

y por comprensión como

$$\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 100,\ x = y^2 \text{ para algún } y \in \mathbb{N}\}.$$

Nota: Cuando la condición es una conjunción de varias condiciones, en lugar de la conjunción 'y' suele escribirse una simple coma.

1.1.1. Operaciones con conjuntos

A continuación se definen las principales operaciones con conjuntos.

Definición 1.1.7. La *unión* de una familia $\mathscr{F}$ de conjuntos es el conjunto $\bigcup \mathscr{F}$ tal que $x \in \bigcup \mathscr{F}$ si y sólo si $x \in A$ para algún $A \in \mathscr{F}$. Las siguientes son notaciones alternativas para este concepto:

$$\bigcup \mathscr{F} = \bigcup_{X \in \mathscr{F}} X = \bigcup \{X : X \in \mathscr{F}\}.$$

Para denotar la unión de dos conjuntos A y B se usa la notación infija $A \cup B$.

Ejemplo 1.1.8. Si $A = \{3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 3, 8\}$ entonces $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 8\}$.

La unión cumple $A \cup A = A$ y $A \cup \varnothing = A$, para todo conjunto A. Además es fácil ver que $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$. La unión de conjuntos es una operación conmutativa, es decir que $A \cup B = B \cup A$. También es asociativa, es decir que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Es inmediato comprobar que $(A \cup B) \cup C$ es la unión de la familia de tres conjuntos $\{A, B, C\}$, la cual en virtud de la asociatividad se puede escribir simplemente como $A \cup B \cup C$. Más en general para la unión de una familia finita $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se usan las notaciones equivalentes siguientes

$$\bigcup \mathscr{F} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Hay dos casos especiales que vale la pena mencionar. Uno es la unión de una familia vacía de conjuntos; esa unión es obviamente vacía, es decir $\bigcup \varnothing = \varnothing$. El otro caso es el de la unión de una familia *singular* (es decir con un solo elemento). Si $\mathscr{F} = \{A\}$, entonces $\bigcup \mathscr{F} = A$.

Definición 1.1.9. La *intersección* de una familia no vacía $\mathscr{F}$ de conjuntos es el conjunto $\bigcap \mathscr{F}$ tal que $x \in \bigcap \mathscr{F}$ si y sólo si $x \in A$ para todo $A \in \mathscr{F}$. Las siguientes son notaciones alternativas para este concepto:

$$\bigcap \mathscr{F} = \bigcap_{X \in \mathscr{F}} X = \bigcap \{X : X \in \mathscr{F}\}.$$

Si $\mathscr{F} = \{A\}$ es una familia singular entonces $\bigcap \mathscr{F} = A$, pero a diferencia de lo que ocurre con la unión, la intersección de una familia vacía de conjuntos no está definida. Para denotar la intersección de dos conjuntos se usa la notación infija $A \cap B$. Obviamente se tiee

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} = \{x \in B : x \in A\}.$$

Ejemplo 1.1.10. Si $A = \{3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ entonces $A \cap B = \{3, 7\}$.

La intersección de conjuntos es conmutativa, es decir que $A \cap B = B \cap A$. y asociativa, es decir que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. También cumple $A \cap A = A$ y $A \cap \varnothing = \varnothing$, y está relacionada con la inclusión de la manera siguiente: $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$. La prueba de toda estas propiedades es inmediata.

La intersección de n conjuntos A_1, A_2,..., A_n puede escribirse de las dos maneras siguientes:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Definición 1.1.11. Dos conjuntos A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \varnothing$, es decir si no tienen elementos comunes. Los conjuntos de una familia son *disjuntos dos a dos* si cada par de miembros de la familia son disjuntos.

Definición 1.1.12. Una *partición* de un conjunto A es una familia de subconjuntos de A, disjuntos dos a dos y tales que su unión es A. A los miembros de una partición se les llama *bloques*.

En particular una partición finita de A es una familia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de subconjuntos de A tales que $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A$.

La unión y la intersección cumplen dos leyes distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

La primera de estas leyes se prueba así: si $x \in A \cap (B \cup C)$ entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$. Pero si $x \in B \cup C$ entonces $x \in B$ o $x \in C$. En el primer caso como $x \in A$ y $x \in B$ se sigue que $x \in A \cap B$. En el segundo caso, de $x \in A$ y $x \in C$ se sigue que $x \in A \cap C$. Por lo tanto en cualquiera de los dos casos $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Recíprocamente si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. En cualquiera de los dos casos se sigue que $x \in A$.

Además en el primer caso $x \in B$ y en el segundo $x \in C$, es decir que en cualquier caso $x \in B \cup C$. De aquí y de $x \in A$ se sigue que $x \in A \cap (B \cup C)$. Se ha probado que si un elemento pertenece a $A \cap (B \cup C)$ entonces pertenece también a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, y recíprocamente. por lo tanto estos conjuntos tienen los mismos elementos y son iguales.

Definición 1.1.13. La *diferencia* de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

cuyos elementos son todos los que pertenecen a A pero no a B.

Ejemplo 1.1.14. Si $A = \{3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ entonces $A \setminus B = \{5, 9\}$ y $B \setminus A = \{2, 4, 8\}$.

La diferencia de conjuntos, al igual que la diferencia entre números, no es conmutativa ni asociativa. En cambio se cumple que $A \setminus A = \varnothing$.

Definición 1.1.15. La *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

cuyos elementos son los que pertenecen a alguno de los dos conjuntos pero no a ambos.

Ejemplo 1.1.16. Si $A = \{3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ entonces $A \triangle B = \{2, 4, 5, 8, 9\}$.

La diferencia simétrica es conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la intersección, es decir

$$\begin{aligned} A \triangle B &= B \triangle A, \\ (A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C) \\ (A \triangle B) \cap C &= (A \cap C) \triangle (B \cap C). \end{aligned}$$

Además se cumple $A \triangle A = \varnothing$ y $A \triangle \varnothing = A$.

Aunque en la teoría de conjuntos no se admite un "conjunto de todas las cosas", frecuentemente hay un conjunto que contiene a todos los demás conjuntos bajo consideración en una discusión determinada. A ese conjunto se le llama *conjunto universal* para esa discusión. Es importante señalar que no hay un único conjunto universal, sino que el mismo depende de la situación que se esté estudiando. Por ejemplo en el estudio de la aritmética el conjunto universal podría ser $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros.

Definición 1.1.17. El *complemento* de un conjunto A respecto a un conjunto universal U es el conjunto

$$A' = U \setminus A$$

cuyos elementos son todos los que pertenecen a U pero no a A.

Si se toma el complemento del complemento de un conjunto se vuelve a obtener el conjunto original, es decir $A'' = A$ para todo conjunto A. También es fácil ver que $A \cap A' = \varnothing$ y $A \cup A' = U$.

Otras propiedades importantes del complemento son las *Leyes de De Morgan*, así llamadas en honor a Augustus De Morgan (1806–1871):

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

La primera se puede demostrar así: si $x \in (A \cup B)'$ entonces $x \notin (A \cup B)$. Pero entonces $x \notin A$ y $x \notin B$ (ya que de pertenecer a cualquiera de ellos pertenecería a su unión), es decir que $x \in A'$ y $x \in B'$ y por lo tanto $x \in A' \cap B'$. Recíprocamente si $x \in A' \cap B'$ entonces $x \in A'$ y $x \in B'$, es decir que $x \notin A$ y $x \notin B$. Por lo tanto $x \notin (A \cup B)$. Se sigue que $(A \cup B)'$ y $A' \cap B'$ tienen los mismos elementos, y por lo tanto son iguales. La segunda ley se demuestra de manera análoga o bien aplicando la primera a A' y B'.

Las leyes de De Morgan se pueden extender a familias arbitrarias de conjuntos. A continuación se enuncian las leyes correspondientes a una familia finita de conjuntos A_1, A_2,..., A_n:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i', \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'.$$

Las operaciones básicas con conjuntos pueden ser visualizadas con los llamados *diagramas de Venn*, así llamados en honor al matemático inglés John Venn (1834–1923). La Figura 1.1 muestra un diagrama en el que se representan dos conjuntos A y B mediante sendos círculos, contenidos en un rectángulo que representa al conjunto universal. Se indican los conjuntos $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ y $(A \cup B)'$. La inclusión de conjuntos puede representarse como se ve en la Figura 1.2.

Definición 1.1.18. El conjunto *potencia* de un conjunto A es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Se le denota $\wp(A)$ y también 2^A.

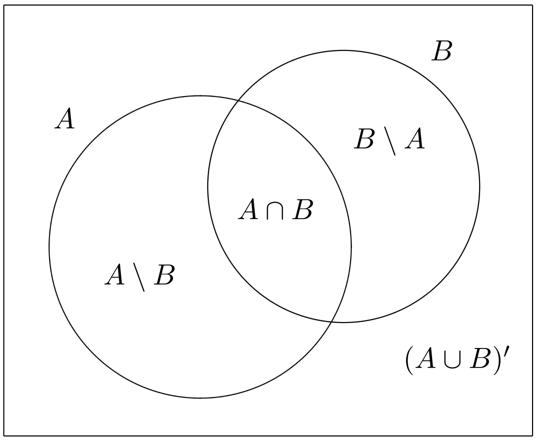

Figura 1.1: Diagrama de Venn

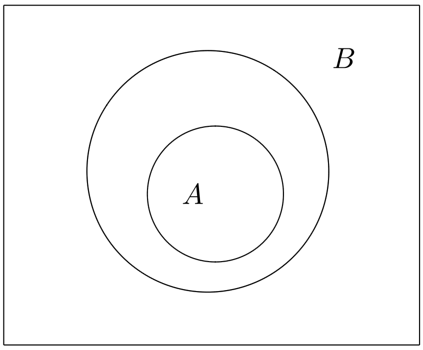

Figura 1.2: $A \subset B$

Ejemplo 1.1.19. Si $A = \{3, 5, 7\}$ entonces sus subconjuntos son $\varnothing$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{5, 7\}$ y $\{3, 5, 7\}$. Por lo tanto

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}\}.$$

Observe que $X \subset A$ y $X \in \wp(A)$ significan exactamente lo mismo.

En un conjunto como $\{a, b\}$ no se puede decir que a es el primer elemento y b el segundo, ya que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Para poder distinguir el orden en que se encuentran los elementos de un par se introduce el siguiente concepto.

Definición 1.1.20. El *par ordenado* con primer elemento a y segundo elemento b es el conjunto (a, b) definido por $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Esta definición puede parecer un poco artificial, pero se trata de un recurso técnico para distinguir el primer elemento de un par ordenado del segundo. Más importante que la manera de definirlos es la siguiente propiedad fundamental de los pares ordenados:

Si $(a, b) = (x, y)$ entonces $a = x$ y $b = y$.

La demostración se deja como problema para el lector.

A los elementos de un par ordenado también se les llama *componentes* o *coordenadas*. Por contraste con el concepto de par ordenado, al par ordinario $\{a, b\}$ se le llama *par no ordenado* o *par desordenado.*

Definición 1.1.21. El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

de todos los pares ordenados con el primer elemento en A y el segundo elemento en B.

Ejemplo 1.1.22. Si $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

El concepto de par ordenado se puede generalizar a ternas, cuaternas, quíntuplas, séxtuplas y en general k-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. La propiedad fundamental de las k-uplas ordenadas es que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k) \text{ si y sólo si } a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k.$$

La definición de producto cartesiano se puede extender para más de dos conjuntos reemplazando los pares ordenados por ternas, cuaternas, etc. Por ejemplo

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$$

Ejercicios 1.1

1. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos determine si son iguales o diferentes.

   (a) $\{a, b, c, d, c\}$ y $\{b, c, a, b, d\}$,

   (b) $\{a, \{b, c\}\}$ y $\{\{a, b\}, c\}$,

   (c) $\{3, \{5, 1\}, \{7, 2, 6\}\}$ y $\{\{2, 6, 7\}, 3, \{1, 5\}\}$,

(d) $\varnothing$ y $\{\{\}\}$.

2. Defina por extensión los siguientes conjuntos:

   (a) $\{x \in \mathbb{N} : 5 < x \leq 10\}$,
   (b) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x < 15,\ x^2 > 90\}$,
   (c) $\{x \in \mathbb{N} : 50 \leq x \leq 70,\ x \text{ es primo}\}$.
   (d) $\{x \in \mathbb{N} : 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$.

3. Defina por comprensión los siguientes conjuntos:

   (a) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,
   (b) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$,
   (c) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$,
   (d) $\{8, 27, 64, 125, 216\}$.

4. Pruebe que

   (a) $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.
   (b) $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

5. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8\}$. Calcule:
   (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$, (d) $B \setminus A$, (e) $A \triangle B$.

6. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8\}$. Tomando como conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ verifique el cumplimiento de las leyes de De Morgan.

7. Pruebe que $A \cup (B \cap A) = A \cap (B \cup A) = A$.

8. Pruebe que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

9. Pruebe que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

10. Pruebe que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

11. Halle el conjunto potencia de los siguientes conjuntos:
    (a) $\{a, b, c\}$, (b) $\{a, \{b, c\}\}$, (c) $\varnothing$.

12. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$. Describa por extensión los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$.

13. Pruebe que

    (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
    (b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,
    (c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Problemas 1.1

1. Pruebe que si $(a, b) = (x, y)$ entonces $a = x$ y $b = y$.

1.2. Relaciones

Definición 1.2.1. Una *relación* R de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$. Si $(x, y) \in R$ entonces se dice que "x está relacionado con y" y se escribe $x\,R\,y$ o $R(x, y)$.

La notación *infija* $x\,R\,y$ es muy común en matemática, por ejemplo para decir que 3 y 5 están vinculados por la relación "menor que" se escribe $3 < 5$. La notación *prefija* $R(x, y)$ a veces se usa sin paréntesis, como Rxy.

Si $A = B$ entonces en lugar de "relación de A en A" simplemente se dice "relación en A".

El conjunto de todas las relaciones de A en B es el conjunto $\wp(A \times B)$.

Ejemplo 1.2.2. Sea $F = \{$Ana, Berta, Carlos, Diana, Ernesto$\}$ una familia en la cual Ana es la madre de Berta, Berta es la madre de Carlos y Diana, y Diana es la madre de Ernesto. Entonces
$M = \{$(Ana, Berta), (Berta, Carlos), (Berta,Diana), (Diana,Ernesto)$\}$
es una relación de F en F que corresponde al concepto intuitivo de la relación "es madre de".

Ejemplo 1.2.3. Dos ejemplos triviales de relaciones de A en B son la relación vacía $\varnothing$, en la cual no hay ningún par de elementos relacionados, y la relación total $A \times B$ en la cual cualquier elemento de A está relacionado con cualquier elemento de B.

Ejemplo 1.2.4. Sea A un conjunto cualquiera, $B = \wp(A)$ y R la relación de A en B definida por $x\,R\,y$ si y sólo si $x \in y$. Es claro que R no es otra cosa que la relación de pertenencia entre elementos y subconjuntos de A.

Definición 1.2.5. Si R es una relación de A en B y $X \subset A$ entonces $R(X)$ es el conjunto definido por

$$R(X) = \{y \in B : (x, y) \in R \text{ para algún } x \in A\}.$$

Análogamente si $Y \subset B$ entonces $R^{-1}(Y)$ se define como

$$R^{-1}(Y) = \{x \in A : (x, y) \in R \text{ para algún } y \in B\}.$$

A $R^{-1}(B)$ se le llama el *dominio* y a $R(A)$ el *rango* de R.

En otras palabras, $R(X)$ es el conjunto de los elementos de B que están relacionados con algún elemento de X y $R^{-1}(Y)$ es el conjunto de los elementos de A que están relacionados con algún elemento de Y.

Una relación R de A en B se puede representar gráficamente marcando en un diagrama los elementos de A y B y trazando, para cada par $(a, b) \in R$, una flecha desde a hasta b.

Ejemplo 1.2.6. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{u, v, w, x\}$. La Figura 1.3 muestra la representación gráfica de $R = \{(a, u), (b, u), (b, w), (d, x)\}$.

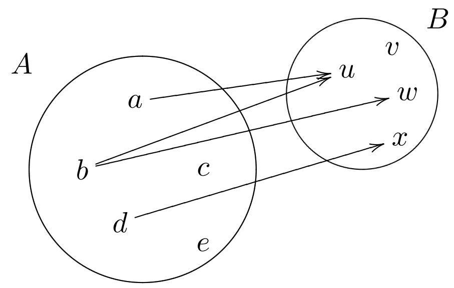

Figura 1.3: Diagrama de una relación

Las relaciones pueden representarse también mediante matrices. Para ello, si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, se construye una matriz (es decir, un arreglo rectangular) que en la intersección de la fila i con la columna j tiene un 1 si $(a_i, b_j) \in R$ y un 0 en caso contrario.

Ejemplo 1.2.7. Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_3)\}$, la matriz M_R correspondiente a R es:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.1. Propiedades de las relaciones

Las propiedades más comunes de una relación de un conjunto en sí mismo se resumen en la siguiente definición.

Definición 1.2.8. Una relación R de un conjunto A en sí mismo es:

reflexiva si $x\,R\,x$ para todo $x \in A$.

irreflexiva si para ningún $x \in A$ se cumple $x\,R\,x$.

simétrica si cada vez que $x\,R\,y$ entonces también $y\,R\,x$.

asimétrica si $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$ nunca se cumplen simultáneamente.

antisimétrica si $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$ implican $x = y$.

transitiva si cada vez que $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$ entonces también $x\,R\,z$.

Ejemplo 1.2.9. En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales la relación "$<$" ("es menor que") es irreflexiva, asimétrica y transitiva. La relación "$=$" ("es igual a") es reflexiva, simétrica y transitiva. La relación "$\geq$" ("es mayor o igual que") es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

1.2.2. Relaciones de orden

Definición 1.2.10. Un *orden parcial* o *relación de orden* es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 1.2.11. Sea X un conjunto cualquiera y $Y = \wp(X)$ su conjunto potencia. La inclusión "$\subset$" es una relación de orden en Y. En efecto, es reflexiva pues $A \subset A$ para todo $A \in Y$, es antisimétrica pues si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$, y es transitiva pues si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Definición 1.2.12. Una relación de orden $\preceq$ en un conjunto A es un *orden lineal* si para cualquier par de elementos $x, y \in A$ se cumple $x \preceq y$ o $y \preceq x$.

Ejemplo 1.2.13. La relación $\leq$ en el conjunto $\mathbb{N}$ es un orden lineal.

A un conjunto provisto de una relación de orden se le llama *conjunto parcialmente ordenado*, o bien *conjunto linealmente ordenado* en el caso de que el orden sea lineal.

Si A es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de orden $\preceq$ y $B \subset A$, se dice que un elemento $x \in A$ es *cota inferior* de B si $x \preceq b$ para todo $b \in B$. Análogamente se dice que un elemento $y \in A$ es *cota superior* de B si $b \preceq y$ para todo $b \in B$. Si una cota inferior de B pertenece a B, se le llama *mínimo* de B. Análogamente, a una cota superior de B que pertenezca a B se le llama *máximo* de B. El máaximo y el mínimo de B pueden no existir, pero si existen son únicos.

1.2.3. Relaciones de equivalencia

Definición 1.2.14. Se dice que R es una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 1.2.15. Sea A un conjunto cualquiera y $R = \{(x,x) : x \in A\}$. Esta relación no es otra cosa que la igualdad, ya que $x\,R\,x$ si y sólo si $x = y$, y es inmediato verificar que es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.2.16. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y sea R una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definida así: $x\,R\,y$ si y sólo si $x-y$ es par. Es claro que R es reflexiva pues $x - x = 0$ es par para todo $x \in \mathbb{Z}$, es simétrica pues si $x - y$ es par también lo es $y - x = -(x - y)$, y es transitiva pues si $x - y$ es par y $y - z$ es par, entonces $x - z = (x - y) + (y - z)$ es par por ser suma de dos números pares.

Definición 1.2.17. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A y $a \in A$, se llama *clase de equivalencia* de a al conjunto $\overline{a}$ definido como $\overline{a} = \{x \in A : x\,R\,a\}$.

A los elementos de una clase de equivalencia se les llama *representantes* de la clase.

Proposición 1.2.18. *Si R es una relación de equivalencia en A entonces las clases de equivalencia son los bloques de una partición de A. Recíprocamente, dada una partición $\mathscr{B}$ de A se puede definir una relación de equivalencia en A tal que sus clases de equivalencia sean los miembros de $\mathscr{B}$.*

Observe que si $a\,R\,b$ entonces $\overline{a} = \overline{b}$. En efecto, si $x \in \overline{a}$ entonces $x\,R\,a$ y como $a\,R\,b$, por transitividad $x\,R\,b$, es decir que $x \in \overline{b}$. Por lo tanto $\overline{a} \subset \overline{b}$. Pero como $b\,R\,a$ (por la simetría) se puede repetir el razonamiento intercambiando a y b y resulta $\overline{b} \subset \overline{a}$. En consecuencia $\overline{a} = \overline{b}$. En particular, dos clases de equivalencia distintas son necesariamente disjuntas (ya que si tuviesen un elemento común c ambas serían iguales a $\overline{c}$). Como todo elemento de A pertenece a su clase de equivalencia, se tiene entonces que las clases de equivalencia son los bloques de una partición de A.

Recíprocamente, dada una partición $\mathscr{B}$ de A sea R la relación definida por $a\,R\,b$ si y sólo para algún $B \in \mathscr{B}$ se tiene $a \in B$ y $b \in B$. Es inmediato verificar que las clases de equivalencia de R son los miembros de $\mathscr{B}$.

Definición 1.2.19. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, al conjunto de todas las clases de equivalencia se le llama *conjunto cociente* de A por la relación R, y se le denota A/R.

Ejemplo 1.2.20. En el Ejemplo 1.2.16 la clase de equivalencia de un elemento x está formada por todos los enteros y tales que $x - y$ es par. Por lo tanto, si x es par, $\overline{x}$ es el conjunto de todos los enteros pares, mientras que si x es impar, $\overline{x}$ es el conjunto de todos los enteros impares. Se ve así que sólo hay dos clases de equivalencia, que se pueden representar como $\overline{0}$ y $\overline{1}$, y $Z/R = \{\overline{0}, \overline{1}\}$.

1.2.4. Operaciones con relaciones

Definición 1.2.21. Si R es una relación de A en B y S es una relación de B en C entonces la *composición* de R y S es la relación $S \circ R$ de A en C definida por

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C : (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S \text{ para algún } y \in B.\}$$

Esta definición algo complicada significa sencillamente que para que un par ordenado (x, z) pertenezca a $S \circ R$ *debe existir* algún elemento y en B que “haga de puente” entre x y z, es decir que cumpla las dos condiciones $x\,R\,y$ y $y\,S\,z$.

Ejemplo 1.2.22. En el conjunto de los seres humanos sean P la relación “es padre o madre de” y H la relación “es hermano de”. Entonces la composición $P \circ H$ corresponde a la relación “es tío de”. En efecto, $x\,P \circ H\,z$ significa que para algún y, x es hermano de y y y es padre o madre de z, es decir que x es tío de z.

Definición 1.2.23. Si R es una relación de A en B entonces la *inversa* de R es la relación R^{-1} de B en A definida por

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in R.\}$$

Ejemplo 1.2.24. La inversa de la relación "es padre o madre de" es "es hijo o hija de". La inversa de la relación "es esposo de" es "es esposa de". En $\mathbb{N}$ la inversa de $<$ es $>$ y la inversa de "divide a" es "es múltiplo de".

Definición 1.2.25. Si R y S son relaciones de A en B y $R \subset S$ entonces se dice que S *extiende* a R, o que es una *extensión* de R.

Definición 1.2.26. Sea P una propiedad de las relaciones de A en B y sea R una relación de A en B. Una extensión R^* de R es la *clausura* de R respecto a la propiedad P si R^* tiene la propiedad P y $R^* \subset S$ para cualquier extensión S de R que tenga la propiedad P. En otras palabras, R^* es la mínima extensión de R que tiene la propiedad P.

Es obvio que la clausura, si existe, es única.

Definición 1.2.27. Una propiedad P de las relaciones de A en B es *invariante bajo intersecciones* si la intersección de cualquier familia de relaciones de A en B que tengan la propiedad P, tiene también la propiedad P.

Ejemplo 1.2.28. La transitividad es una propiedad de las relaciones en A invariante bajo intersecciones. En efecto sea $\mathscr{F}$ es una familia de relaciones transitivas en A y $R = \bigcap \mathscr{F}$. Si $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$ entonces $x\,S\,y$ y $y\,S\,z$ para toda $S \in \mathscr{F}$. Pero como toda $S \in \mathscr{F}$ es transitiva se deduce que $x\,S\,z$ para toda $S \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $x\,R\,z$.

Proposición 1.2.29. *Sea R una relación de A en B y sea P una propiedad de las relaciones de A en B invariante bajo intersecciones. Si existe alguna extensión T de R que tenga la propiedad P entonces existe la clausura de R respecto a P.*

En efecto, sea

$$\mathscr{F} = \{S \in \wp(A \times B) : R \subset S \text{ y } S \text{ tiene la propiedad } P\}.$$

Como $T \in \mathscr{F}$ la familia $\mathscr{F}$ no es vacía y se puede formar su intersección $R^* = \bigcap \mathscr{F}$. Como todos los miembros de esta intersección contienen a R, se sigue que $R \subset R^*$ y R^* es una extensión de R. Como P es invariante bajo intersecciones se sigue que R^* tiene la propiedad P. Finalmente si S es cualquier extensión de R que tenga la propiedad P, entonces S es un miembro de $\mathscr{F}$, y por lo tanto $R^* \subset S$.

Ejemplo 1.2.30. Como la transitividad es una propiedad invariante bajo intersecciones y la relación total es transitiva, por el ña Proposición 1.2.29 cualquier relación tiene *clausura transitiva* (es decir, clausura respecto a la propiedad de ser transitiva).

Ejercicios 1.2

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$. ¿Qué propiedades tiene cada una de las siguientes relaciones de A en A?

   (a) $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$,

   (b) $R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (d, d)\}$,

   (c) $R = \{(a, a), (a, c), (c, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$,

2. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{u, v, w, x, y\}$, $C = \{a, c\}$, $D = \{v, y\}$, $R = \{(a, u), (b, u), (b, w), (d, x), (c, u)\}$. Halle $R(A)$, $R(C)$, $R^{-1}(B)$ y $R^{-1}(D)$.

   Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{v, w, x, y\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(b, w), (b, y), (c, x), (c, y), (d, v)\}$ y $S = \{(v, 2), (w, 2), (w, 3), (y, 1)\}$. Halle R^{-1}, S^{-1}, $S \circ R$, $R^{-1} \circ S^{-1}$ y $(S \circ R)^{-1}$.

3. En el conjunto de los seres humanos sea R la relación "es hermano o hermana de" y sea H la relación "es hijo o hija de". Exprese cada una de las siguientes relaciones a partir de R y H, utilizando composición e inversas.

   (a) "es nieto o nieta de",

   (b) "es abuelo o abuela de",

   (c) "es sobrino o sobrina de",

   (d) "es tío o tía de",

   (e) "es primo o prima de",

4. Pruebe que una relación R en A es simétrica si y sólo si $R^{-1} \subset R$.

5. Pruebe que una relación R en A es transitiva si y sólo si $R \circ R \subset R$.

6. En $\mathbb{N}$ se define la relación de divisibilidad "$|$" así: $a|b$ si y sólo si existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $ax = b$. Pruebe que "$|$" es una relación de orden.

7. ¿Cuál es el conjunto cociente de la relación de igualdad en el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$?

8. Halle la clausura transitiva de $R = \{(a, b), (b, c), (a, d), (d, a)\}$.

9. ¿Cuáles de las propiedades de una relación de un conjunto en sí mismo listadas en la Definición 1.2.8 son invariantes por intersección?

10. Dada una relación cualquiera de un conjunto en sí mismo, ¿tiene siempre clausura respecto a la propiedad de ser una relación de equivalencia?

1.3. Funciones

Definición 1.3.1. Una relación f de A en B se dice que es una *función* si para cada $x \in A$ existe un y sólo un $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Ese elemento y se denomina *valor* de f en x o *imagen* de x por f y se denota $f(x)$. El elemento x se dice que es una *preimagen* de y. Para indicar que f es una función de A en B se escribe $f : A \to B$. Al conjunto A se le llama *dominio* de f y al conjunto B se le llama *codominio* o *contradominio* de f.

Observe que el dominio de una función $f : A \to B$ no es otra cosa que su dominio considerada como relación. Al rango $f(A)$ también se le llama *recorrido* de f. El conjunto de todas las funciones de A en B se denota B^A.

A las funciones en ciertos contextos se les llama con otros nombres, tales como: correspondencia, transformación, operador, mapa, mapeo, etc. Estos términos evocan la idea intuitiva de que las funciones realizan algún tipo de "acción" sobre los elementos de su dominio, aunque esta idea está ausente de la definición matemática de función.

Ejemplo 1.3.2. Para cualquier conjunto A la relación $I_A = \{(x, x) : x \in A\}$ es una función llamada *identidad* en A. Observe que $I_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Ejemplo 1.3.3. Dados dos conjuntos A y B y un elemento $b \in B$ la relación $f = \{(x, b) : x \in A\}$ es una función de A en B llamada *función constante* con valor b. Observe que $f(x) = b$ para todo $x \in A$.

Es muy común definir una función $f : A \to B$ especificando el valor $f(x)$ que f toma en cada elemento x de A. Por ejemplo la función identidad $I_A : A \to A$ se puede definir como $I_A(x) = x$ para todo $x \in A$. También se usa la notación $f : x \mapsto x$. Con esta notación la función constante del Ejemplo 1.3.3 se definiría como $f : x \mapsto b$.

Una función se puede interpretar como una correspondencia que a cada elemento del dominio le asocia un elemento del codominio. La correspondencia puede graficarse trazando una flecha desde cada elemento del dominio hasta su imagen.

Ejemplo 1.3.4. Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{u, v, w, x, y\}$ y $f = \{(a, v), (b, v), (c, w), (d, x)\}$. La Figura 1.4 es una representación de $f : A \to B$.

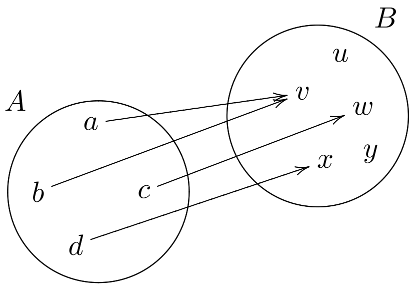

Figura 1.4: $f : A \to B$ como correspondencia

Observe que en el diagrama de una función de A en B, de cada elemento de A debe salir una y sólo una flecha hacia B. En cambio a cada elemento de B pueden llegar una, varias o ninguna flecha.

Otra manera de visualizar una función consiste en interpretar cada elemento del dominio como un objeto y cada elemento del codominio como una caja. Entonces la función es una distribución de los objetos en las cajas.

La Figura 1.5 muestra la misma función de la Figura 1.4 interpretada como una distribución de objetos en cajas.

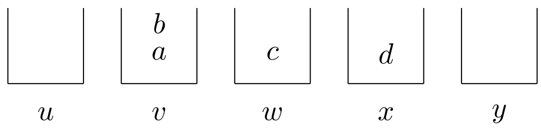

Figura 1.5: $f : A \to B$ como distribución de objetos en cajas

Definición 1.3.5. Si $f : A \to B$, $X \subset A$ y $Y \subset B$ entonces, adaptando las definiciones dadas para las relaciones, se tiene

$$f(X) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}.$$

y

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

A $f(X)$ se le llama *imagen* de X por f y a $f^{-1}(Y)$ se le llama *preimagen* de Y por f.

Si X e Y son subconjuntos de B entonces es inmediato verificar que

$$\begin{aligned} f^{-1}(X \cup Y) &= f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y), \\ f^{-1}(X \cap Y) &= f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y), \\ f^{-1}(X \setminus Y) &= f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

De hecho las dos primeras propiedades valen para uniones e intersecciones arbitrarias.

Definición 1.3.6. Una función $f : A \to B$ es *inyectiva* o *uno a uno* si elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes. Equivalentemente, f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

En el diagrama de una función inyectiva, a cada elemento del codominio llega *a lo sumo* una flecha.

Ejemplo 1.3.7. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x+2$ es inyectiva pues si $f(x) = f(y)$ entonces $x + 2 = y + 2$, de donde se deduce $x = y$. En cambio $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $g(x) = x^2$ no es inyectiva pues $g(-1) = g(1) = 1$.

Definición 1.3.8. Una función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* (o simplemente *sobre*) si $f(A) = B$, es decir si el recorrido de f coincide con su contradominio. En este caso se dice que f es una función de A *sobre* B.

Observe que si f es una función de A sobre B y $y \in B$ entonces existe al menos un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 1.3.9. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x + 2$ es sobreyectiva pues si $f(x-2) = x$, por lo tanto cualquier $x \in Z$ tiene la preimagen $x-2$. En cambio $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $g(x) = x^2$ no es sobreyectiva pues $g(\mathbb{Z})$ no contiene ningún entero negativo, por lo tanto $g(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$.

En el diagrama de una función sobreyectiva, a cada elemento del codominio llega *por lo menos* una flecha.

Definición 1.3.10. Una función $f : A \to B$ es *biyectiva* si es tanto inyectiva como sobreyectiva. En este caso también se dice que f es una *biyección* entre A y B y que ambos conjuntos son *coordinables* o que tienen el mismo *cardinal*.

En el diagrama de una función biyectiva, a cada elemento del codominio llega *exactamente* una flecha.

Ejemplo 1.3.11. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x + 2$ es biyectiva, pues es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 1.3.12. Para cualquier conjunto A, $I_A : A \to A$ es una biyección. En efecto, si $I_A(x) = I_A(y)$ entonces $x = y$, por lo tanto I_A es inyectiva, y como claramente $I_A(A) = A$, I_A es también sobre. Observe que en particular cuando $A = \varnothing$ se tiene que $\varnothing : \varnothing \to \varnothing$ es una biyección (es decir que la función vacía es una biyección del conjunto vacío en sí mismo).

La Definición 1.2.21 de composición de relaciones se puede aplicar en particular a las funciones, y el resultado es otra función. A continuación se da una definición de composición adaptada al lenguaje de las funciones.

Definición 1.3.13. Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, si $B \subset C$ se define la *composición* de f y g como la función $g \circ f : A \to D$ definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

La composición de funciones, como en general la de relaciones, es asociativa.

Una función $f : A \to A$ se puede componer con sí misma, y el resultado $f \circ f$ se denota f^2. Si se vuelve a componer f^2 con f se obtiene $f \circ f \circ f$ que se denota f^3, y así sucesivamente. A las funciones f^n obtenidas por este procedimiento se les llama *iteradas* de la función f.

Toda función $f : A \to B$, considerada como relación, tiene una inversa f^{-1} de B en A. Sin embargo esa inversa no es, en general, una función. Esto puede deberse a dos razones: la primera es que si f no es sobreyectiva entonces habría por lo menos un elemento de B no relacionado con ninguno de A; la segunda razón es que si f no es inyectiva entonces existirían dos elementos diferentes $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$, y el elemento $f(x)$ de B tendría al menos dos elementos relacionados en A. Como se ve, la condición necesaria y suficiente para que la relación f^{-1} sea función es que f sea biyectiva. En ese caso a $f^{-1} : B \to A$ se le llama *función inversa* de f, y es inmediato verificar que $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$.

Definición 1.3.14. Si $f : A \to B$ y $C \subset A$, entonces $\{(x, y) \in f : x \in C\}$ es una función de C en B que se llama *restricción* de f a C y se denota $f|C$. La función f se dice que es una *extensión* de $f|C$.

Ejemplo 1.3.15. Si $B \subset A$ entonces la restricción $I_A|B$ se denomina *inclusión* o *inyección* de B en A.

Definición 1.3.16. Sea X un conjunto y A un subconjunto de X. La *función característica* de A es la función $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definida como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

La función $\chi : \wp(X) \to \{0, 1\}^X$ definida por $\chi(A) = \chi_A$ es una biyección. En efecto, como $x \in A$ si y sólo si $\chi_A(x) = 1$ y $x \in B$ si y sólo si $\chi_B(x) = 1$, si $\chi(A) = \chi(B)$ entonces $\chi_A = \chi_B$ y se tiene que $x \in A$ si y sólo si $x \in B$, es decir $A = B$. Por lo tanto χ es inyectiva. Dada cualquier $f \in \{0,1\}^X$ sea $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Entonces $\chi_A = f$ y se tiene que χ es sobre. Por lo tanto χ es una biyección.

Esta biyección permite identificar $\wp(X)$ con $\{0,1\}^X$. Ahora bien, la sucesión de números enteros no negativos 0,1,2,... puede definirse de la manera siguiente:

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{\varnothing\} = \{0\}, \quad 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0,1\}, \ldots$$

(esto se explicará más detalladamente en un capítulo posterior). Por lo tanto la biyección χ permite identificar $\wp(X)$ con 2^X. Por esta razón a veces se usa la notación 2^X para referirse al conjunto potencia de X.

El lector que desee profundizar sus conocimientos sobre la teoría intuitiva de conjuntos, sin adentrarse en los vericuetos de la lógica matemática y los sistemas formalizados, debería comenzar por leer la excelente obra *Teoría Intuitiva de los Conjuntos* de Paul R. Halmos.

Ejercicios 1.3

1. Sea $f : \{1,2,3,4,5\} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x^2 + x + 1$. Exprese f como un conjunto de pares ordenados.

2. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x^2$. Calcule (a) $f(-3)$, (b) $f(\{-2,1,5\}$, (c) $f^{-1}(\{4\})$, (d) $f^{-1}(\{3\})$, (d) $f^{-1}(\{4,5,6,7,8,9\})$.

3. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x^2 + x + 1$.

   (a) ¿Es f inyectiva?

   (b) ¿Es f sobre?

   (c) ¿Es $f|\mathbb{N}$ inyectiva?

4. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 2$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = x^3$. Calcule (a) $f^{-1}(x)$, (b) $f \circ g(x)$, (c) $g \circ f(x)$, (d) $f^{-1} \circ g(x)$, (e) $g(x) \circ f^{-1}$.

5. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Pruebe que:

   (a) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ también lo es.

   (b) Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ también lo es.

(c) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6. Pruebe que si f es una biyección entonces f^{-1} también lo es.

7. Sea $f : A \to B$. Pruebe que

   (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ para cualquier par de subconjuntos X, Y de A.

   (b) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para cualquier par de subconjuntos X, Y de A si y sólo si f es inyectiva.

   (c) $f(A \setminus X) \subset B \setminus f(X)$ para todo subconjunto X de A si y sólo si f es inyectiva.

   (d) $f(A \setminus X) \supset B \setminus f(X)$ para todo subconjunto X de A si y sólo si f es sobreyectiva.

8. Si $f : A \to B$, una función $g : B \to A$ se dice que es *inversa por la derecha* de f si $f \circ g = I_B$. Análogamente se dice que g es *inversa por la izquierda* si $g \circ f = I_A$. Pruebe que

   (a) f tiene inversa por la derecha si y sólo si f es sobre.

   (b) f tiene inversa por la izquierda si y sólo si f es inyectiva.

9. Sea $f : A \to B$ una función sobre y sea R la relación en A definida así: $x\,R\,y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$. Pruebe que R es una relación de equivalencia y que existe una biyección entre B y A/R.

Problemas 1.3

1. Si $f : A \to B$ y $X \subset A$, la notación $f(X)$ es potencialmente ambigua. Explique porqué.

2. Sea A un conjunto cualquiera. Pruebe que no existe ninguna función de A sobre $\wp(A)$.

3. Sea A un conjunto finito y $f : \wp(A) \to \wp(A)$ una función tal que si $X \subset Y$ entonces $f(X) \subset f(Y)$. Pruebe que f tiene un *punto fijo*, es decir que existe $Z \in \wp(A)$ tal que $f(Z) = Z$.