Notas sobre Redes de Flujo

José Heber Nieto

1. Definiciones y conceptos básicos

Las redes de flujo son modelos matemáticos aplicables a situaciones tales como: sistemas de tuberías (para fluídos como agua, petróleo o gas), redes de cableado eléctrico, sistemas de carreteras, sistemas de transporte de mercancías, etc. La definición formal es la siguiente:

Definición 1.1. Una *red de flujo* es un digrafo $G = (V, E)$ con una función de *capacidad* $c : E \to \mathbb{R}^+$ y dos vértices distinguidos, llamados fuente y sumidero.

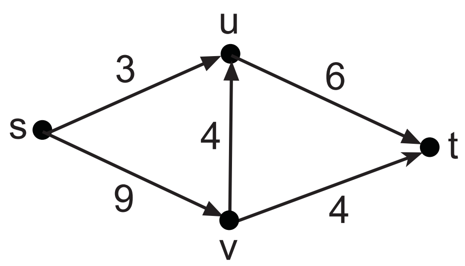

Figura 1: Red de flujo.

Ejemplo 1.2. La figura 1 muestra una red de flujo, con las capacidades para cada arco. Aquí y en lo sucesivo la fuente se denota con s y el sumidero con t.

Si no existe ningún arco de un vértice u a otro v se asumirá que $c(u, v) = 0$. De esta manera c queda definida para cualquier par de vértices.

Las redes que se han definido tienen una única fuente y un único sumidero. En la práctica pueden presentarse redes con más de una fuente y más de un sumidero; más adelante se verá cómo tratar esos casos.

Definición 1.3. Una *flujo* en una red $G = (V, E)$ con capacidad c es una función $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

Acotación: $f(u, v) \leq c(u, v)$ para todo $u, v \in V$.

Antisimetría: $f(u, v) = -f(v, u)$ para todo $u, v \in V$.

Conservación del flujo: Si $u \neq s, t$ entonces $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$.

El *valor* del flujo f es la cantidad $\mathcal{V}(f) = \sum_{v \in V} f(s, v)$.

La primera condición simplemente establece que el flujo a través de un arco no puede exceder la capacidad del mismo.

La segunda condición significa que a un flujo de un vértice u a otro v le corresponde un flujo igual pero de signo contrario de v hacia u. De esta condición se deduce que $f(u, u) = -f(u, u)$ y por lo tanto $f(u, u) = 0$ para todo $u \in V$.

La tercera condición significa que en los vértices diferentes de la fuente y el sumidero no hay pérdida ni acumulación de flujo, en otras palabras, lo que llega debe ser igual a lo que sale.

El *valor* del flujo $\mathcal{V}(f)$ es la suma de todo lo que sale de la fuente.

Si $f : V \times V \to \mathbb{R}$ es una función y X e Y son subconjuntos de V, se usará la notación $f(X, Y)$ como abreviatura de la sumatoria $\sum_{x \in X,\ y \in Y} f(x, y)$. Si X consta de un solo elemento x entonces en vez de $f(\{x\}, Y)$ se escribirá sencillamente $f(x, Y)$, y en vez de $f(X, \{y\})$ se escribirá $f(X, y)$. Con esta notación el valor de un flujo f es $\mathcal{V}(f) = f(s, V)$, y la condición de conservación del flujo puede expresarse como $f(u, V) = 0$ para todo vértice $u \neq s, t$.

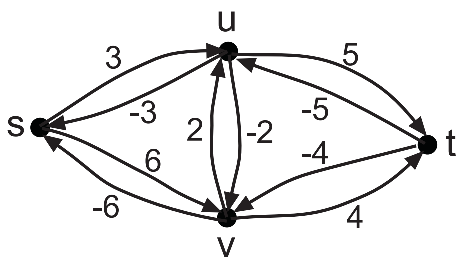

Figura 2: Flujo f en la red G de la Figura 1.

Ejemplo 1.4. La figura 2 muestra un flujo en la red de la figura 1. Como ejercicio, verifique que se cumplen las tres condiciones de la Definición 1.2.

En lo sucesivo, para no abarrotar los diagramas, al representar un flujo se indicarán solamente los valores positivos, sobreentendiendo que a cada uno de ellos le corresponde otro de igual valor y signo contrario en la dirección opuesta.

Si $s = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = t$ es un camino de s a t en una red $G = (V, E)$ y $a = \min\{c(u_{i-1}, u_i) : i = 1, \ldots, n\}$, entonces el puede definirse un flujo h *asociado al camino* del siguiente modo:

$h(u_{i-1}, u_i) = a$ para $i = 1, \ldots, n$,

$h(u_i, u_{i-1}) = -a$ para $i = 1, \ldots, n$,

$h(v, w) = 0$ si (v, w) y (w, v) no pertenecen al camino.

Definición 1.5. Si f es un flujo en una red $G = (V, E)$ con capacidad $c : E \to \mathbb{R}^+$ entonces el *grafo residual* es $G_f = (V, E_f)$, donde

$$E_f = \{(u, v) \in E : c(u.v) > f(u, v)\}$$

y la capacidad $c_f : E_f \to \mathbb{R}^+$ se define como $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

Ejemplo 1.6. La Figura 3 muestra el grafo residual correspondiente a la red de la Figura 1 y al flujo de la Figura 2.

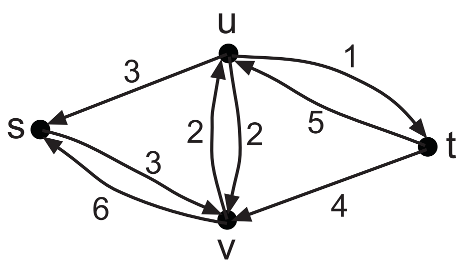

Figura 3: Grafo residual G_f.

Observe que no hay arco de s a u, ya que $c_f(s, u) = c_(s, u) - f(s, u) = 3 - 3 = 0$. En cambio hay un arco con capacidad 3 de u a s, puesto que $c_f(u, s) = c_(u, s) - f(u, s) = 0 - (-3) = 3$.

Definición 1.7. Un *corte* es una partición del conjunto de vértices de una red $G = (V, E)$ en dos subconjuntos disjuntos S y T, de tal modo que $s \in S$ y $t \in T$. La *capacidad* del corte (S, T) es $c(S, T) = \sum_{x \in S,\ y \in T} c(x, y)$.

Por ejemplo, un corte para la red de la Figura 1 es el constituído por $S = \{s, v\}$, $T = \{u, t\}$. Su capacidad es $c(s, u) + c(v, u) + c(v, t) = 3 + 4 + 4 = 11$.

Lema 1.8. *Si f es un flujo y (S,T) es un corte en una red $G = (V,E)$ con capacidad c entonces $f(S,T) \leq c(S,T)$.*

Demostración. Observe que para cada arco (x,y) con $x \in S$, $y \in T$ se cumple $f(x,y) \leq c(x,y)$, por lo tanto sumando todas esas desigualdades resulta $f(S,T) \leq c(S,T)$. □

2. Propiedades fundamentales

Lema 2.1. *Si f es un flujo en una red $G = (V,E)$ entonces*

1. *$f(X,X) = 0$ para todo $X \subset V$.*
2. *$f(X,Y) = -f(Y,X)$ para todo $X,Y \subset V$.*
3. *Si $X,Y,Z \subset V$ y $X \cap Y = \varnothing$, entonces $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$ y $f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$.*
4. *Si $s,t \notin X \subset V$ entonces $f(X,V) = f(V,X) = 0$.*

Demostración. En la sumatoria $f(X,X)$ los términos de la forma $f(u,u)$ son todos nulos, mientras que para cada término $f(u,v)$ con $u \neq v$ hay un término $f(v,u)$, y la suma de ambos es nula por la antisimetría. Por lo tanto $f(X,X) = 0$. De la antisimetría se desprende inmediatamente que

$$f(X,Y) = \sum_{x \in X,\ y \in Y} f(x,y) = -\sum_{x \in X,\ y \in Y} f(y,x = -f(Y,X).$$

La propiedad 3 es inmediata, pues obviamente

$$f(X \cup Y, Z) = \sum_{\substack{t \in X \cup Y \\ z \in Z}} f(t,z) = \sum_{\substack{x \in X \\ z \in Z}} f(x,z) + \sum_{\substack{y \in Y \\ z \in Z}} f(y,z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

y análogamente $f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$.

Finalmente, si $s,t \notin X$ y $x \in X$ entonces $f(x,V) = 0$ por la conservación del flujo. Por lo tanto

$$f(X,V) = \sum_{x \in X} f(x,V) = \sum_{x \in X} 0 = 0,$$

y $f(V,X) = -f(X,V) = 0$. □

Lema 2.2. *Si f es un flujo en una red $G = (V, E)$ y (S, T) es un corte, entonces $f(S, T) = \mathcal{V}(f)$.*

Demostración. Aplicando 1, 3 y 4 del lema anterior se tiene:

$\mathcal{V}(f) = f(s, V) = f(S, V) - f(S - s, V) = f(S, V)$
$= f(S, S \cup T) = f(S, S) + f(S, T) = f(S, T).$ □

Lema 2.3. *Si f es un flujo en una red $G = (V, E)$ y (S, T) es un corte, entonces $\mathcal{V}(f) \leq c(S, T)$.*

Demostración. Por el lema 2.2 se tiene $\mathcal{V}(f) = f(S, T)$, y por el lema 1.8 $f(S, T) \leq c(S, T)$, por lo tanto $\mathcal{V}(f) \leq c(S, T)$. □

El siguiente lema muestra cómo a partir de un flujo se puede obtener otro de mayor valor.

Lema 2.4. *Si f es un flujo en una red $G = (V, E)$, $s = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = t$ es un camino de s a t en el grafo residual G_f y h es el flujo asociado a ese camino, entonces $f + h$ es un flujo en G y $\mathcal{V}(f + h) = \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(h)$.*

Demostración. Es inmediato verificar que la suma de dos flujos cumple siempre las condiciones de antisimetría y conservación, por lo tanto lo único que hace falta para probar que $f + h$ es un flujo es verificar la condición de acotación. Ahora, si (v, w) no pertenece al camino entonces $h(v, w) \leq 0$ y por lo tanto $(f + h)(v, w) \leq f(v, w) \leq c(v, w)$. Si (u_{i-1}, u_i) es un arco del camino entonces $h(u_{i-1}, u_i) \leq c_f(u_{i-1}, u_i) = c(u_{i-1}, u_i) - f(u_{i-1}, u_i)$, de donde $(f + h)(u_{i-1}, u_i) \leq c(u_{i-1}, u_i)$. Finalmente, la igualdad $\mathcal{V}(f + h) = \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(h)$ es obvia. □

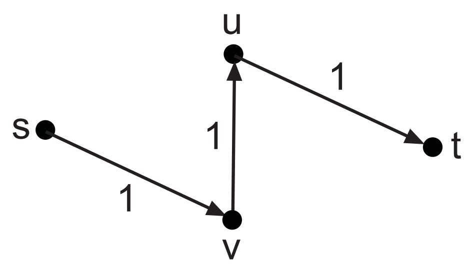

Figura 4: Flujo h asociado al camino s, v, u, t.

Ejemplo 2.5. En el grafo residual de la Figura 3 hay un camino de s a t, a saber el s, v, u, t. El mínimo de las capacidades de los arcos de este camino es 1, y el flujo h asociado al camino es el que muestra la Figura 4 (donde sólo se indican los flujos positivos).

Si se suman el flujo f representado en la Figura 2 y el flujo h se obtiene el flujo $f + h$ mostrado en la Figura 5.

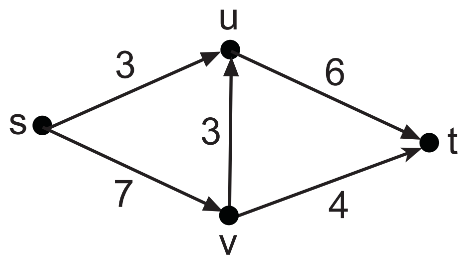

Figura 5: Flujo $f + h$.

Teorema 2.6 (Flujo máximo corte mínimo)**.** *Sea f un flujo en una red $G = (V, E)$ con capacidad c. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es un flujo máximo.*
2. *En G_f no hay ningún camino de s a t.*
3. *Existe un corte (S^*, T^*) para el cual $c(S^*, T^*) = \mathcal{V}(f)$.*
4. $\text{mín}\{c(S,T) : (S,T) corte\} = \mathcal{V}(f)$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ es obvio, ya que si en G_f hubiese un camino de s a t entonces, sumando a f el flujo asociado al camino, se podría obtener un flujo de valor mayor que $\mathcal{V}(f)$ (ver Lema 2.4).
$2 \Rightarrow 3$: Sean $S = \{v \in V : \text{existe un camino de } s \text{ a } t \text{ en } G_f\}$ y $T = V \setminus S$. Es claro que (S, T) es un corte y que no hay ningún arco de S a T en G_f. Por lo tanto $c(S, T) - \mathcal{V}(f) = c(S, T) - f(S, T) = c_f(S, T) = 0$.
$3 \Rightarrow 4$: Para cualquier corte (S, T) se tiene, por el Lema 2.3, que $\mathcal{V}(f) \leq c(S, T)$. Por lo tanto $\mathcal{V}(f) \leq \text{mín}\{c(S, T) : (S, T)\text{corte}\}$. Pero si hay un corte (S^*, T^*) para el cual $c(S^*, T^*) = \mathcal{V}(f)$, se cumple entonces la igualdad $\text{mín}\{c(S, T) : (S, T)\text{corte}\} = \mathcal{V}(f)$.
$4 \Rightarrow 3$: Es obvio.

$3 \Rightarrow 1$: Si $c(S^*, T^*) = \mathcal{V}(f)$, para cualquier otro flujo f' se tiene, por el Lema 2.3, que $\mathcal{V}(f') \leq c(S^*, T^*) = \mathcal{V}(f)$. Por lo tanto f es un flujo máximo. $\square$

3. El método de Ford-Fulkerson

Ford y Fulkerson propusieron el siguiente procedimiento para hallar un flujo máximo en una red $G = (V, E)$:

para $u \in V$ **haga**
  para $v \in V$ **haga** $f(u, v) \leftarrow 0$
mientras en G_f haya un camino de s a t **haga**
  calcule el flujo h asociado al camino
  $f \leftarrow f + h$

La idea del procedimiento consiste en comenzar con un flujo nulo, buscar un camino de s a t, utilizarlo para incrementar el flujo, calcular el grafo residual, buscar en éste un camino de s a t, y así sucesivamente. Si en algún momento no se encuentra ningún camino de s a t en el grafo residual, este procedimiento se detiene y el Teorema 2.6 nos asegura que f es un flujo máximo.

Una forma de asegurarnos de que el procedimiento se detenga es trabajar con funciones capacidad que sólo tomen valores enteros. Esto en la práctica no significa ninguna restricción, ya que se puede lograr expresando las capacidades en una unidad suficientemente pequeña. En este caso, como el flujo se incrementa en cada iteración en un valor entero $\mathcal{V}(h)$, se generará una progresión de números enteros estrictamente creciente y acotada superiormente (por ejemplo por $c(s, V - s)$), la cual necesariamente debe ser finita.

En conclusión, si las capacidades son todas enteras el método de Ford-Fulkerson es propiamente un algoritmo. Más precisamente, es toda una familia de algoritmos, según cómo se implemente la búsqueda de los caminos de s a t. En general el orden del algoritmo de Ford-Fulkerson es $O(|V|M)$, siendo M el valor del flujo máximo.

Esto puede mejorarse si se emplea búsqueda en amplitud para hallar los caminos. En este caso el algoritmo resultante se conoce como *algoritmo de Edmonds-Karp* y puede probarse que corre en tiempo $O(|V||E|^2)$.

El método de Ford-Fulkerson puede aplicarse también a redes con fuentes y sumideros múltiples. Si s_1, s_2,...,s_k son las fuentes y t_1, t_2,...,t_h son los sumideros, el valor de un flujo f se define como $\sum_{i=1}^{k} f(s_i, V)$. Para hallar el flujo máximo se agregan a la red dos vértices: un vértice s conectado por arcos (s, s_i) de capacidad ∞ a cada fuente s_i, y un vértice t conectado por arcos (t_j, t) de capacidad ∞ a cada sumidero t_j. Un flujo máximo en la nueva red, con fuente única s y sumidero único t, soluciona el problema del flujo máximo en la red original.

3.0.1. Aplicación: Pareos en grafos bipartitos

Un *pareo* en un grafo bipartito es una colección de aristas no incidentes. Por ejemplo en el grafo representado en la Figura 6, el conjunto de aristas $\{(a, u), (b, w)\}$ es un pareo.

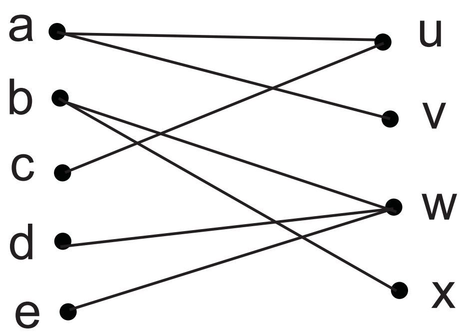

Figura 6: Grafo bipartito.

Una situación a la cual se le puede aplicar este modelo es la de una escuela que cuenta con varios profesores, cada uno de los cuales puede dictar cierto conjunto de materias. En este caso se puede construir un grafo bipartito en el cual los profesores sean una clase de vértices, las materias la otra clase, y si el profesor p puede dictar la materia m se agrega al grafo la arista (p, m). Un pareo en este grafo sería una asignación de materias a profesores de tal modo que a ningún profesor le corresponda más de una materia y a ninguna materia le corresponda más de un profesor.

Un pareo es *máximo* si su número de aristas es el mayor posible (entre todos los pareos que admita el grafo). El pareo $\{(a, u), (b, w)\}$ para el grafo de la Figura 6 es *maximal*, es decir que no se le puede agregar ninguna arista sin que deje de ser un pareo, pero obviamente no es máximo. El pareo $\{(a, v), (b, x), (c, u), (e, w)\}$ sí es máximo. En efecto, si los vértices de un grafo bipartito se particionan en dos conjuntos V_1 y V_2 (tales que cada arista tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2) entonces es claro que el número de aristas de un pareo no puede exceder a $\min\{|V_1|, |V_2|\}$. En el grafo de la Figura 6 este mínimo es 4, por lo tanto un pareo con 4 aristas es necesariamente máximo.

El método de Ford-Fulkerson puede emplearse para hallar un pareo máximo en un grafo bipartito $G = (V, E)$. Para ello, si $V = V_1 \cup V_2$ es la bipartición del conjunto de vértices, se construye un digrafo $G' = (V', E')$ donde $V' = V \cup \{s, t\}$ es el conjunto V con dos vértices adicionales, que llamamos s y t. Por su parte

$$E' = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2, (u, v) \in E\} \cup \{(s, u) : u \in V_1\} \cup \{(v, t) : v \in V_2\}.$$

En otras palabras, se agregan arcos desde s a cada vértice de V_1 y desde cada vértice de V_2 hasta t. A cada arco de este digrafo se le asigna capacidad 1, con lo cual se obtiene una red de flujo. Es bastante claro que si se obtiene un flujo máximo para G', las aristas de E por las cuales circule una unidad de flujo van a constituir un pareo máximo para G.