

# CAPÍTULO 1

---

## Grafos

---

**E**ste capítulo es una introducción a la teoría de grafos. Los grafos son estructuras discretas compuestas por puntos (llamados vértices) y líneas (llamadas aristas) que conectan algunos pares de esos puntos. Son una abstracción útil para modelar diversas situaciones reales como por ejemplo: redes de computadoras, redes telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos, sistemas de carreteras, sistemas de transporte y distribución de mercancías y sistemas organizacionales.

Hay muchos libros dedicados por entero a esta disciplina, que el lector interesado puede consultar. Entre ellos cabe destacar los clásicos [H2, B2], y entre los más modernos [B2, D1]. En español es muy recomendable el de José Rodríguez [R6].

## 1.1. Definiciones y conceptos básicos

### 1.1.1. Grafos simples

**Definición 1.1.1.** Un *grafo simple* es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito no vacío de elementos llamados *vértices* y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de  $V$  llamados *aristas*. Por razones técnicas se supondrá que  $V \cap E = \emptyset$ .

Si  $e = \{u, v\}$  es una arista entonces se dice que los vértices  $u$  y  $v$  son los

*extremos* de  $e$ . Un vértice y una arista son *incidentes* si el vértice es uno de los extremos de la arista. Dos vértices  $u$  y  $v$  son *adyacentes* si  $\{u, v\}$  es una arista. El *orden* de un grafo  $G = (V, E)$  es el número de vértices  $|V|$ .

Lamentablemente en teoría de grafos no hay una terminología uniforme y aceptada por todos. Casi puede decirse que cada autor tiene su propia terminología, y por eso la mayoría de las obras sobre grafos comienzan definiendo los conceptos que se van a utilizar. En particular, los vértices de un grafo también son llamados nodos o puntos y las aristas líneas, arcos o ejes.

Un grafo se representa por medio de puntos o pequeños círculos, que designan vértices, y líneas que los unen, que representan las aristas. Para simplificar la notación frecuentemente designaremos una arista  $\{u, v\}$  simplemente como  $uv$ .

*Ejemplo 1.1.2.* Sea  $V = \{a, b, c, d, e\}$  y  $E = \{ab, bd, be, de\}$ . Entonces  $(V, E)$  es un grafo con cinco vértices ( $a, b, c, d$  y  $e$ ) y cuatro aristas ( $ab, bd, be$  y  $de$ ). La figura 1.1 es su representación gráfica:

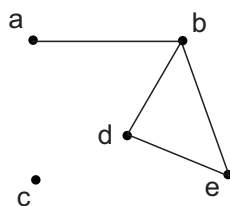


Figura 1.1: Grafo simple.

**Definición 1.1.3.** El *grado* de un vértice  $v$  de un grafo es el número  $g(v)$  de aristas incidentes con él. Si  $g(v) = 0$  se dice que  $v$  es un vértice *aislado*.

En el grafo del ejemplo anterior se tiene  $g(a) = 1$ ,  $g(b) = 3$ ,  $g(d) = g(e) = 2$  y  $g(c) = 0$  ( $c$  es un vértice aislado).

La *sucesión de grados* de un grafo se obtiene ordenando en forma no decreciente los grados de todos los vértices. En el ejemplo anterior la sucesión de grados es 0, 1, 2, 2, 3.

**Teorema 1.1.4** (Euler). *En todo grafo  $G = (V, E)$  se cumple*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|.$$

*Demostración.* Las aristas se pueden contar viendo cuántas son incidentes con cada vértice y sumando todos los números obtenidos. Pero así cada arista resulta contada dos veces, una por cada uno de sus extremos.  $\square$

**Corolario 1.1.5.** *En todo grafo  $G = (V, E)$  el número de vértices de grado impar es par.*

**Definición 1.1.6.** Dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  son *isomorfos* si existe una biyección  $f : V \rightarrow V'$  que preserve la relación de adyacencia, es decir tal que

$$\{u, v\} \in E \quad \text{si y sólo si} \quad \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Para indicar que  $G$  y  $G'$  son isomorfos se escribe  $G \approx G'$ .

*Ejemplo 1.1.7.* Los dos grafos representados en la figura 1.2 son isomorfos, ya que la función  $f$  que lleva  $a$  en  $a'$ ,  $b$  en  $b'$ ,  $c$  en  $c'$  y  $d$  en  $d'$  es una biyección y preserva la adyacencia.

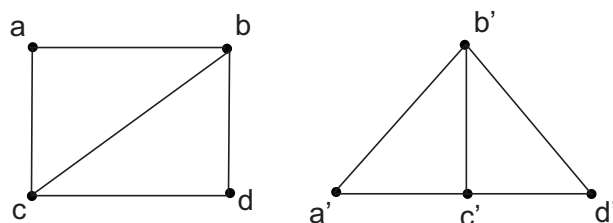


Figura 1.2: Grafos isomorfos.

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices. Más aún todas las propiedades que se deriven de la relación de adyacencia deben ser idénticas en ambos, en particular deben tener el mismo número de aristas, el mismo número de vértices aislados y la misma sucesión de grados. Para los fines de la teoría de grafos, dos grafos isomorfos se consideran idénticos.

Dos grafos con idénticas sucesiones de grados tienen el mismo número de vértices y de aristas, pero esto no es suficiente para que los grafos sean isomorfos, como muestran los dos grafos representados en la figura 1.3. Ambos tienen sucesión de grados 1, 1, 1, 2, 3, 3, pero no son isomorfos ya que en el de la izquierda el único vértice de grado 2 es adyacente a un vértice de grado 1 y a otro de grado 3, mientras que en el grafo de la derecha el único vértice de grado 2 es adyacente a dos vértices de grado 3.



Figura 1.3: Grafos no isomorfos.

### 1.1.2. Algunos tipos particulares de grafos

**Definición 1.1.8.** Se llama *grafo completo* de  $n$  vértices a un grafo con  $n$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  cuyas aristas son todos los pares  $\{v_i, v_j\}$  con  $1 \leq i < j \leq n$ .

Todos los grafos completos de  $n$  vértices son isomorfos, y se les denota como  $K_n$ . El número de aristas de  $K_n$  es  $n(n-1)/2$ . En la figura 1.4 se representan los grafos completos de orden 1 a 5.

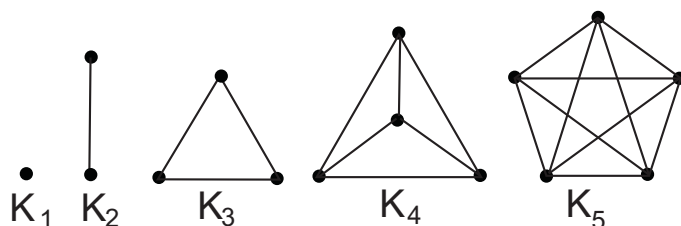


Figura 1.4: Grafos completos.

**Definición 1.1.9.** Un grafo  $G = (V, E)$  se dice que es *bipartito* si el conjunto de vértices  $V$  puede partitionarse en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tales que todas las aristas tengan un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ .

En la figura 1.5 se representa un grafo bipartito con  $V_1 = \{s, t, u, v\}$  y  $V_2 = \{x, y, z\}$ . Si  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$  y  $E = V_1 \times V_2$  (es decir, si  $uv$  es una arista para todo par de vértices  $u \in V_1, v \in V_2$ ) entonces se dice que el grafo es *bipartito completo* y se denota  $K_{m,n}$ . En la figura 1.6 se representa  $K_{3,2}$ .

**Definición 1.1.10.** Un *camino* de longitud  $n$  es un grafo  $G = (V, E)$  con  $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$ . Los vértices  $v_0$  y  $v_n$  son los *extremos* del camino. Observe que un grafo con un solo vértice es un camino de longitud 0.

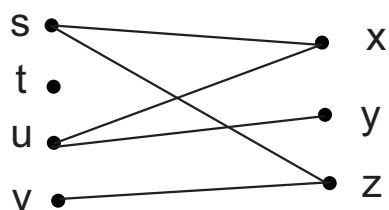
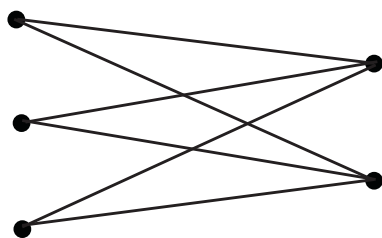


Figura 1.5: Grafo bipartito.

Figura 1.6: Grafo bipartito completo  $K_{3,2}$ .

Los caminos se representan dando la sucesión  $v_0v_1 \dots v_n$  de los vértices que lo componen, entendiendo que sus aristas son  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$ . Todos los caminos de longitud  $n$  son isomorfos, y se les denota  $P_n$ . El camino de longitud 0,  $P_0$ , consta de un solo vértice y ninguna arista.

**Definición 1.1.11.** Un *ciclo* de longitud  $n$  es un grafo  $G = (V, E)$  de orden  $n \geq 3$ , con vértices  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  y aristas  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-2}v_{n-1}$  y  $v_{n-1}v_0$ .

Los ciclos se representan dando la sucesión  $v_0v_1 \dots v_{n-1}$  de los vértices que lo componen, entendiendo que sus aristas son  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-2}v_{n-1}$  y  $v_{n-1}v_0$ . Todos los ciclos de longitud  $n$  son isomorfos, y se les denota  $C_n$ . En la figura 1.7 se representan  $P_5$  y  $C_5$ .

**Definición 1.1.12.** Un grafo  $G = (V, E)$  es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si el grado común es  $k$  se dice que el grafo es *k-regular*. A los grafos 3-regulares se les llama también grafos *cúbicos*.

La figura 1.8 muestra un grafo cúbico de 8 vértices (precisamente el grafo formado por los vértices y aristas de un cubo).

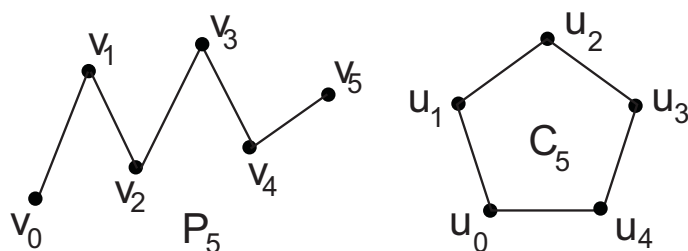


Figura 1.7: Camino y ciclo.

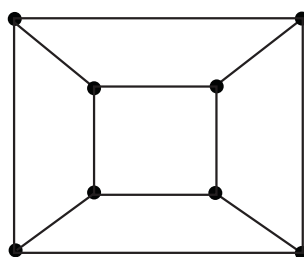


Figura 1.8: Grafo cúbico.

### 1.1.3. Subgrafos

**Definición 1.1.13.** Si  $G = (V, E)$  y  $H = (W, F)$  son grafos tales que  $W \subset V$  y  $F \subset E$ , entonces se dice que  $H$  es un *subgrafo* de  $G$  y que  $G$  es un *supergrafo* de  $H$ .

**Definición 1.1.14.** Si  $G = (V, E)$  es un grafo y  $W \subset V$ , se llama *subgrafo inducido* (o generado) por  $W$  al grafo  $G[W] = (W, F)$  con  $F = (W \times W) \cap E$ . En palabras, el subgrafo de  $G$  inducido por  $W$ , denotado  $G[W]$ , es el grafo que tiene a  $W$  como conjunto de vértices y como aristas a todas las aristas de  $G$  que tengan ambos extremos en  $W$ .

*Ejemplo 1.1.15.* Sea  $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, ac, bc, ad, de\})$ . Entonces  $H = (\{a, b, c\}, \{ac, bc\})$  es un subgrafo de  $G$ . El subgrafo de  $G$  inducido por  $\{a, b, c\}$  es  $(\{a, b, c\}, \{ab, ac, bc\})$ .

Un *ciclo* en un grafo  $G$  es un subgrafo de  $G$  que sea él mismo un ciclo.

**Proposición 1.1.16.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sea  $\delta(G)$  el mínimo de los

grados de sus vértices. Si  $\delta(G) \geq 2$  entonces  $G$  contiene un ciclo de longitud mayor que  $\delta(G)$ .

*Demostración.* Sea  $v_0v_1 \dots v_k$  un camino de longitud máxima en  $G$ . Como  $g(v_k) \geq 2$ ,  $v_k$  debe ser adyacente a algún vértice  $u \neq v_{k-1}$ , que debe pertenecer al camino pues de lo contrario éste se podría extender. Sea  $v_i$  el vértice con menor índice que sea adyacente a  $v_k$ . Entonces  $v_iv_{i+1} \dots v_k$  es un ciclo y como todos los vértices adyacentes a  $v_k$  deben pertenecer a este ciclo se deduce que su longitud es al menos  $\delta(G) + 1$ .  $\square$

**Definición 1.1.17.** La *cintura* de un grafo es la longitud del ciclo más corto que contiene, y su *circunferencia* es la longitud del ciclo más largo. Si el grafo es *acíclico*, es decir si no contiene ningún ciclo, entonces por convención su cintura es  $\infty$  y su circunferencia es 0.

*Ejemplo 1.1.18.* El grafo de la figura 1.9 contiene tres ciclos:  $cdefg$ ,  $hef$  y  $cdehfg$ . Por lo tanto su cintura es 3 y su circunferencia es 6.

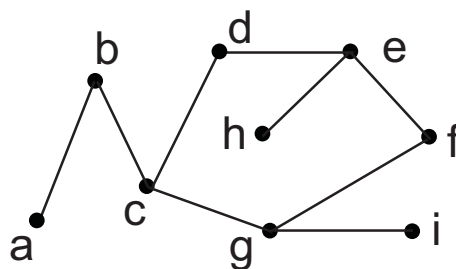


Figura 1.9: Cintura y circunferencia.

#### 1.1.4. Operaciones con grafos

Hay varias operaciones conjuntistas que pueden realizarse con grafos. La siguiente definición reúne las más comunes.

**Definición 1.1.19.** La *unión* de dos grafos  $G = (V, E)$  y  $H = (W, F)$  es el grafo  $G \cup H = (V \cup W, E \cup F)$ , y su *intersección* es el grafo  $G \cap H = (V \cap W, E \cap F)$ . El *complemento* de  $G = (V, E)$  es  $G' = (V, E')$ , donde  $E'$  es el complemento de  $E$  en el conjunto  $V \times V$ . En otras palabras  $G'$  tiene el mismo conjunto de vértices que  $G$ , pero dos vértices son adyacentes en  $G'$  si y sólo si no lo son en  $G$ .

La figura 1.10 muestra un grafo  $G$  y su complemento  $G'$ .

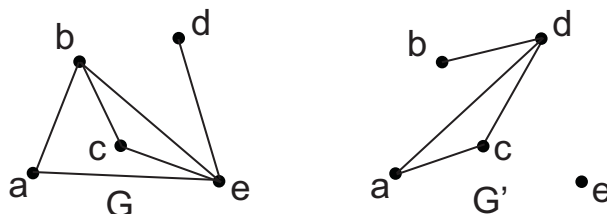


Figura 1.10: Complemento.

Si  $G = (V, E)$  es un grafo y  $F \subset V \times V$ , entonces  $G + F = (V, E \cup F)$  y  $G - F = (V, E \setminus F)$ . En particular si  $e \in V \times V$  usaremos la notación  $G + e$  en vez de  $G + \{e\} = (V, E \cup \{e\})$ , y  $G - e$  en vez de  $G - \{e\} = (V, E \setminus \{e\})$ .

Análogamente Si  $W$  es un conjunto de vértices entonces  $G + W = (V \cup W, E)$ . Algo más complicada es la definición de  $G - W$ , pues si se suprime un vértice hay que suprimir también todas las aristas incidentes con él. Entonces  $G - W = (V \setminus W, E')$ , donde  $E'$  es el conjunto de aristas en  $E$  que no son incidentes con ningún vértice en  $W$ . Si  $W = \{x\}$  se utilizan las notaciones abreviadas  $G + x$  en vez de  $G + \{x\}$  y  $G - x$  en vez de  $G - \{x\}$ .

En la figura 1.11 se representan un grafo  $G$ , el resultado de adicionarle una arista  $G + xy$  y el resultado de suprimir un vértice  $G - w$ .

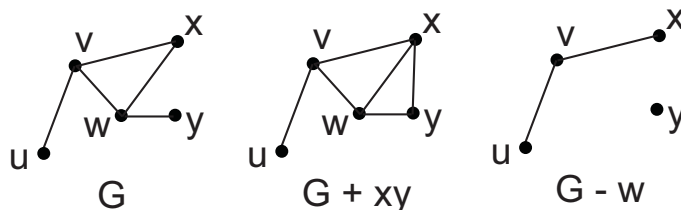


Figura 1.11: Operaciones con grafos.

**Definición 1.1.20.** Si  $G = (V, E)$  es un grafo y  $e = uv \in E$ , se denota  $G/e$  al grafo que resulta de la *contracción* de  $e$  a un punto, es decir que  $e$ ,  $u$  y  $v$  se eliminan y se sustituyen por un nuevo vértice  $w$ , adyacente a todos los vértices que eran adyacentes a  $u$  o a  $v$ .

La figura 1.11 muestra un grafo  $G$  y el resultado de contraer una arista  $e$  a un punto.

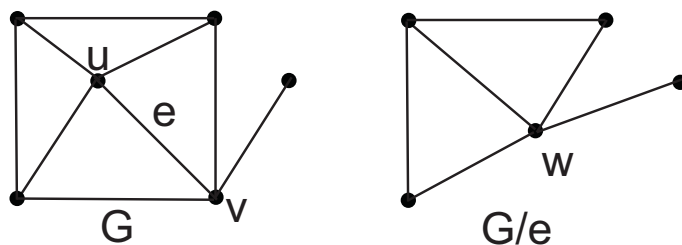


Figura 1.12: Contracción.

**Definición 1.1.21.** Se llama *subdivisión* de un grafo  $G = (V, E)$  a cualquier grafo obtenido a partir de  $G$  sustituyendo algunas aristas  $uv$  por caminos de  $u$  a  $v$  (con vértices interiores no pertenecientes a  $V$ ).

Intuitivamente, una subdivisión de un grafo se obtiene agregando vértices en las aristas del grafo original, como se ve en la figura 1.13.

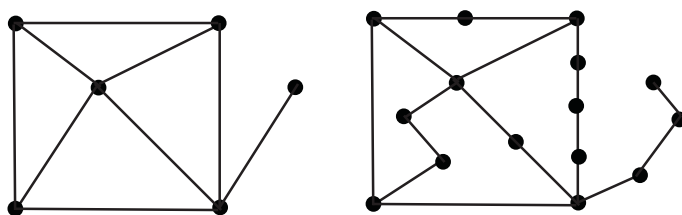


Figura 1.13: Subdivisión.

### 1.1.5. Grafos conexos

Un *camino* en un grafo  $G$  es simplemente un subgrafo de  $G$  que, considerado como grafo, sea un camino. Un camino se representa dando la sucesión  $v_0v_1 \dots v_k$  de los vértices que lo componen, entendiendo que sus aristas son  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$  y sus extremos  $v_0$  y  $v_k$ .

**Definición 1.1.22.** La *distancia*  $d(u, v)$  entre dos vértices  $u$  y  $v$  de un grafo es la longitud del camino más corto de  $u$  a  $v$ . Si no existe ningún camino de

$u$  a  $v$  se pone  $d(u, v) = \infty$ . El *diámetro* de  $G$  es la máxima distancia entre dos vértices de  $G$  y se denota  $\text{diam}(G)$ .

**Definición 1.1.23.** Un grafo  $G = (V, E)$  es *conexo* si para cualquier par de vértices  $u, v \in V$  existe un camino en  $G$  que los une, es decir un camino con extremos  $u$  y  $v$ . Equivalentemente,  $G$  es conexo si  $\text{diam}(G) < \infty$ .

Observe que un grafo de orden 1 es conexo, ya que su único vértice puede unirse consigo mismo mediante un camino de longitud 0. En cambio se conviene en que el grafo vacío no es conexo.

**Proposición 1.1.24.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sea  $\delta(G)$  el mínimo de los grados de sus vértices. Entonces  $\text{diam}(G) \geq \delta(G)$ .

*Demostración.* Sea  $k = \text{diam}(G)$  y sea  $v_0v_1 \dots v_k$  un camino de longitud  $k$ . Entonces todos los vértices adyacentes a  $v_k$  deben pertenecer al camino, pues de lo contrario éste se podría extender y el diámetro de  $G$  sería mayor que  $k$ . Por lo tanto  $\delta(G) \leq g(v_k) \leq k = \text{diam}(G)$ .  $\square$

**Definición 1.1.25.** Un vértice de un grafo  $G = (V, E)$  es *central* si la máxima distancia que lo separa de otro vértice es tan pequeña como sea posible. A esa distancia se le llama *radio* de  $G$  y se denota  $r(G)$ . Formalmente,

$$r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y).$$

Es fácil probar que

$$r(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2r(G).$$

**Proposición 1.1.26.** Sea  $G$  un grafo conexo y  $e$  una arista perteneciente a un ciclo en  $G$ . Entonces  $G - e$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $v_0v_1 \dots v_{k-1}$  un ciclo y  $e = v_0v_1$ . Dados dos vértices  $u$  y  $w$  de  $G$  hay un camino  $P$  que los une. Si  $P$  no incluye la arista  $e$ , entonces  $P$  los une también en  $G - e$ . Si en cambio  $P$  incluye la arista  $e$ , se la sustituye por  $v_0v_{k-1}v_{k-2} \dots v_2v_1$  (o por  $v_1v_2 \dots v_{k-1}v_0$  si  $v_1$  aparece antes que  $v_0$  en  $P$ ) y se tiene un camino en  $G - e$  que une  $u$  con  $w$ .  $\square$

*Ejemplo 1.1.27.* El grafo de la figura 1.14 es conexo. Por ejemplo dados los vértices  $b$  y  $h$ , un camino que los une es el  $bcdeh$ ; hay otros ( $bcgeh$ ,  $bcgifeh$ ,  $bacdeh$ ,  $bacgeh$  y  $bacgifeh$ ), pero el más corto es  $bcdeh$ , por lo tanto  $d(b, h) = 4$ . Como no hay vértices a distancia mayor que 4, el diámetro de este grafo es 4. Hay dos puntos de corte:  $c$  y  $e$ . La arista  $hi$  es el único puente.

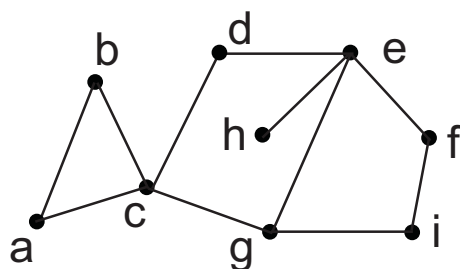


Figura 1.14: .

### 1.1.6. Árboles

**Definición 1.1.28.** Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico.

En la figura 1.15 se representa un árbol con 13 vértices y 12 aristas.

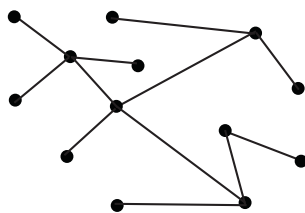


Figura 1.15: Árbol.

**Lema 1.1.29.** Un árbol con  $n > 1$  vértices tiene al menos dos vértices de grado 1.

*Demostración.* Sea  $P = v_0v_1 \dots v_k$  un camino de la mayor longitud posible. Si  $g(v_k) > 1$  entonces  $v_k$  sería adyacente a un vértice  $u \neq v_{k-1}$ . Si  $u = v_i$  para algún  $i < k-1$ , entonces  $v_iv_{i+1} \dots v_k$  sería un ciclo. Y si  $u$  no pertenece a  $P$  entonces el camino se podría extender. Como en ambos casos se llega a una contradicción debe ser  $g(v_k) = 1$  y análogamente  $g(v_0) = 1$ .  $\square$

**Teorema 1.1.30.** Un árbol con  $n$  vértices tiene  $n - 1$  aristas.

*Demostración.* Por inducción en  $n$ . Para  $n = 1$  se cumple pues no hay aristas. Si  $n > 1$  y el árbol tiene  $m$  aristas, sea  $v$  un vértice de grado 1. Entonces  $G - v$

tiene  $n - 1$  vértices y  $m - 1$  aristas, y obviamente es acíclico y conexo. Por la hipótesis inductiva debe ser  $m - 1 = (n - 1) - 1$ , de donde  $m = n - 1$ .  $\square$

**Teorema 1.1.31.** *Un grafo conexo con  $n$  vértices tiene al menos  $n - 1$  aristas, y tiene exactamente  $n - 1$  aristas si y sólo si es un árbol.*

*Demostración.* Si un grafo conexo  $G$  es un árbol, entonces tiene  $n - 1$  aristas. Si no es un árbol y tiene  $m$  aristas, entonces debe contener algún ciclo. Removiendo una arista del ciclo se obtiene un grafo conexo  $G_1$  con  $m - 1$  aristas. Si  $G_1$  no es un árbol se repite el mismo procedimiento, y así sucesivamente hasta obtener un grafo conexo  $G_k$  con  $m - k$  aristas y sin ciclos, es decir un árbol. Entonces  $m - k = n - 1$  y  $m = n - 1 + k > n - 1$ .  $\square$

**Teorema 1.1.32.** *Se  $G = (V, E)$  un grafo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- (a)  $G$  es un árbol.
- (b) Dos vértices cualesquiera de  $G$  están unidos por un único camino.
- (c)  $G$  es conexo pero si se le quita cualquier arista deja de serlo.
- (d)  $G$  es acíclico pero si se le agrega una arista cualquiera deja de serlo.

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b): Si  $G$  es un árbol entonces es conexo y dos vértices cualesquiera  $u$  y  $v$  están unidos por un camino. Si existiesen caminos diferentes  $x_0x_1x_2 \dots x_n$  y  $y_0y_1y_2 \dots y_m$ , con  $x_0 = y_0 = u$  y  $x_n = y_m = v$ , sea  $i$  el primer índice para el cual  $x_i \neq y_i$ , y sea  $j > i$  el primer índice mayor que  $i$  para el cual  $x_j = y_k$ , para algún  $k$ . Entonces  $x_{i-1}x_i \dots x_{j-1}y_ky_{k-1} \dots y_ix_{i-1}$  sería un ciclo, lo cual es absurdo.

(b) $\Rightarrow$ (c): Si dos vértices cualesquiera de  $G$  están unidos por un único camino, entonces  $G$  es conexo. Si  $uv$  es una arista de  $G$ , en  $G - uv$  no hay ningún camino de  $u$  a  $v$  (pues si no en  $G$  habría al menos dos caminos de  $u$  a  $v$ ).

(c) $\Rightarrow$ (d): Si  $G$  contuviese un ciclo, quitando cualquier arista del mismo debería seguir siendo conexo.

(d) $\Rightarrow$ (a): Basta ver que  $G$  es conexo, es decir que dados dos vértices cualesquiera  $u$  y  $v$ , existe un camino de  $u$  a  $v$ . Si  $u$  y  $v$  son adyacentes, ese camino es simplemente  $uv$ . Si no lo son, en  $G + uv$  debe haber un ciclo  $vux_1x_2 \dots x_nv$ , y entonces  $ux_1x_2 \dots x_nv$  es un camino de  $u$  a  $v$  en  $G$ .  $\square$

### 1.1.7. Componentes conexas

**Definición 1.1.33.** Una *componente conexa* de un grafo  $G$  es un subgrafo conexo maximal de  $G$ , es decir un subgrafo conexo que no está propiamente contenido en ningún otro subgrafo conexo de  $G$ .

El grafo de la figura 1.16 tiene cuatro componentes conexas, una de las cuales es un solo vértice.

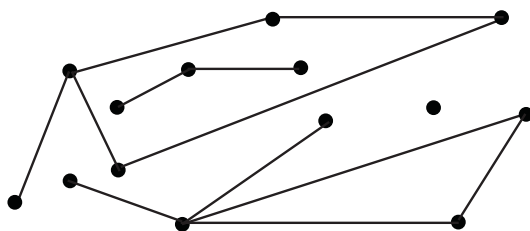


Figura 1.16: Componentes conexas.

Las componentes conexas de un grafo son disjuntas, y el grafo es la unión de ellas. Si un grafo es acíclico entonces cada una de sus componentes conexas es un árbol. por ello a los grafos acíclicos se les llama *bosques*.

**Teorema 1.1.34.** Si un grafo acíclico  $G$  tiene  $n$  vértices y  $k$  componentes conexas, entonces tiene  $n - k$  aristas.

*Demostración.* Cada componente conexa de  $G$  es un árbol. Por lo tanto si la  $i$ -ésima componente tiene  $n_i$  vértices, debe tener  $n_i - 1$  aristas. Entonces el número de aristas de  $G$  es

$$(n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k.$$

□

**Corolario 1.1.35.** Un grafo acíclico con  $n$  vértices tiene a lo sumo  $n - 1$  aristas, y tiene  $n - 1$  aristas si y sólo si es un árbol.

*Demostración.* Si es conexo es un árbol y tiene  $n - 1$  aristas. Si no es conexo entonces tiene  $k \geq 2$  componentes conexas y  $m - k < m - 1$  aristas. □

*Ejemplo 1.1.36.* Como aplicación de los resultados anteriores supongamos que un algoritmo halla el mínimo de  $n$  números diferentes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  efectuando comparaciones del tipo  $a_i < a_j$ . ¿Cuántas comparaciones debe realizar como mínimo?

*Solución.* Consideremos los números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  como los vértices de un grafo, y ejecutemos el algoritmo. Unamos  $a_i$  con  $a_j$  mediante una línea si y sólo si el algoritmo comparó  $a_i$  con  $a_j$ . El grafo resultante debe ser conexo, ya que de lo contrario no habría manera de saber cuál de dos números pertenecientes a componentes conexas diferentes es el más grande. Por lo tanto debe tener al menos  $n - 1$  aristas, es decir que un algoritmo que determine el mínimo debe hacer al menos  $n - 1$  comparaciones.  $\square$

### 1.1.8. Separación y conectividad

**Definición 1.1.37.** Sean  $G = (V, E)$  un grafo,  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $V$  y  $X \subset V \cup E$ . Se dice que  $X$  separa a  $A$  y  $B$  si todo camino que tenga un extremo en  $A$  y el otro en  $B$  tiene un vértice o una arista en  $X$ . Un vértice que separa a otros dos vértices de su misma componente conexa se llama *vértice de corte*. Una arista que separa a sus extremos se llama *puente*.

Es fácil ver que una arista es un puente si y sólo si no pertenece a ningún ciclo.

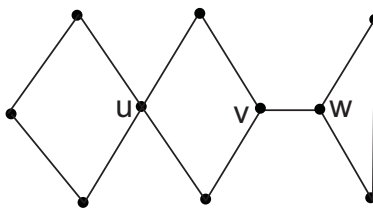


Figura 1.17: Puentes y vértices de corte.

En la figura 1.17 hay un solo puente, la arista  $vw$ , y tres vértices de corte:  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

**Definición 1.1.38.** Si  $k \geq 0$  es un entero, un grafo  $G = (V, E)$  se dice que es  $k$ -conexo si tiene más de  $k$  vértices y  $G - X$  es conexo para cualquier subconjunto de vértices  $X$  con  $|X| < k$ . Al mayor entero  $k$  tal que  $G = (V, E)$  es  $k$ -conexo se le llama *conectividad* de  $G$  y se denota  $\kappa(G)$ .

En otras palabras:  $G$  es  $k$ -conexo si se necesita remover al menos  $k$  vértices para desconectarlo. Observe que cualquier grafo (no vacío) es 0-conexo. Un grafo es 1-conexo si y sólo si tiene al menos dos vértices y es conexo.

Observe que  $\kappa(G) = 0$  si y sólo si  $G$  no es conexo o  $G = K_1$ . Para los grafos completos se tiene  $\kappa(K_n) = n - 1$ . Los ciclos  $C_n$  tienen conectividad 2.

En una red de computadoras, si los equipos (computadoras, enrutadores, puentes, etc.) se consideran como vértices y los cables como aristas, que el grafo resultante tenga conectividad  $k$  significa que hasta  $k-1$  equipos pueden dejar de funcionar sin que los demás dejen de estar conectados entre sí.

Hay un concepto de conectividad análogo sustituyendo vértices por aristas.

**Definición 1.1.39.** Si  $k \geq 0$  es un entero, Un grafo  $G = (V, E)$  es *k-conexo por aristas* si tiene más de un vértice y  $G - F$  es conexo para cualquier subconjunto de aristas  $F$  con  $|F| < k$ . Al mayor entero  $k$  tal que  $G = (V, E)$  es *k-conexo por aristas* se le llama *conectividad por aristas* de  $G$  y se denota  $\lambda(G)$ .

La conectividad por aristas de un grafo no conexo es 0. Es fácil ver que en general se tiene:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \text{diam}(G).$$

### 1.1.9. Grafos Eulerianos

**Definición 1.1.40.** Una *caminata* en un grafo  $G = (V, E)$  es una sucesión alternada de vértices y aristas  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k$ , donde  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  para  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Si  $v_0 = v_k$  la caminata se dice cerrada, de lo contrario se dice abierta. Una caminata es *euleriana* si incluye a cada arista del grafo exactamente una vez. Un grafo es *euleriano* si admite una caminata euleriana cerrada.

**Teorema 1.1.41.** *Un grafo es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo euleriano. Es obvio que  $G$  es conexo. Ahora bien, el grado de un vértice  $v_i$  en una caminata euleriana es igual al doble del número de veces que  $v_i$  aparece en el interior de la caminata, más uno por cada vez que  $v_i$  aparece como extremo. Si  $G$  admite una caminata euleriana cerrada, entonces es obvio que cada vértice debe tener grado par.

Recíprocamente si  $G$  es conexo y todos sus vértices tienen grado par, sea  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k$  una caminata sin aristas repetidas y de la mayor longitud posible. Entonces todas las aristas incidentes con  $v_k$  pertenecen a

la caminata (pues de lo contrario ésta se podría extender), y como el grado de  $v_k$  es par debe ser  $v_k = v_0$ . Si hubiese una arista  $e$  no perteneciente a esta caminata, y uno de sus vértices fuese un  $v_i$ , si el otro vértice es  $u$  entonces la caminata  $uev_i e_i \dots v_{k-1} e_{k-1} v_0 e_0 \dots e_{i-1} v_i$  sería más larga que la de mayor longitud, absurdo. Si ninguno de los vértices  $u, v$  de  $e$  es un  $v_i$  entonces, como  $G$  es conexo, hay un camino  $uu_1 \dots u_j v_0$  de  $u$  a  $v_0$ . Si  $u_i$  es el primer vértice de ese camino perteneciente a la caminata, entonces  $u_{i-1} u_i$  es una arista que no pertenece a la caminata pero tiene un vértice en ella, lo cual es absurdo.  $\square$

**Teorema 1.1.42.** *Un grafo admite una caminata euleriana abierta si y sólo si es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

*Demostración.* Sea  $G$  conexo con exactamente dos vértices  $u$  y  $v$  de grado impar. Si  $u$  y  $v$  no son adyacentes sea  $G' = G + uv$ . Entonces por el teorema 1.1.41  $G'$  admite una caminata euleriana cerrada, y al quitarle la arista  $uv$  queda una caminata euleriana abierta con extremos  $u$  y  $v$ . Si en cambio  $u$  y  $v$  son adyacentes, sea  $x$  un nuevo vértice y  $G' = G + x + ux + xv$ . Entonces por el teorema 1.1.41  $G'$  admite una caminata euleriana cerrada, y al quitarle las aristas  $ux$  y  $xv$  queda una caminata euleriana abierta con extremos  $u$  y  $v$ .  $\square$

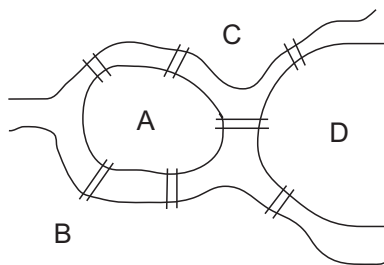


Figura 1.18: Los siete puentes de Königsberg.

*Ejemplo 1.1.43.* La ciudad de Königsberg, capital de Prusia oriental en el siglo XVIII, era atravesada por el río Pregel, sobre el cual había siete puentes. Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar al punto de partida, habiendo pasado una y sólo una vez por cada puente.

Euler resolvió el problema en 1735. Observemos que las regiones en que estaba dividida Königsberg y los 7 puentes pueden representarse como se ve en la figura 1.19. Como hay vértices de grado impar, este grafo no es

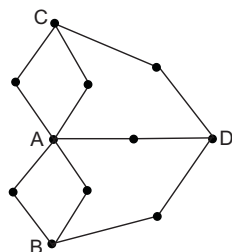


Figura 1.19: Grafo de Königsberg.

euleriano. Más aún, como hay más de dos vértices de grado impar ni siquiera admite una caminata euleriana abierta.

### 1.1.10. Grafos Hamiltonianos

**Definición 1.1.44.** Un *ciclo hamiltoniano* en un grafo es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo. Un grafo es *hamiltoniano* si contiene un ciclo hamiltoniano. Un *camino hamiltoniano* es un camino que contiene a todos los vértices.

Observe que un ciclo hamiltoniano debe contener todos los vértices, pero no necesariamente todas las aristas. Los ciclos  $C_n$  son ejemplos triviales de grafos hamiltonianos. Un ejemplo menos trivial es el grafo formado por los vértices y aristas de un cubo.

Si  $n \geq 3$  el grafo completo  $K_n$  es hamiltoniano. De hecho, cualquier permutación de los vértices de un grafo completo da lugar a un ciclo hamiltoniano. El número de ciclos hamiltonianos en  $K_n$  es  $(n-1)!/2$ .

El nombre de estos grafos proviene de William Rowan Hamilton (1805–1865), matemático irlandés que propuso como rompecabezas hallar un ciclo que pase por todos los vértices de un dodecaedro regular. El acertijo se facilita si se representa el grafo del dodecaedro en el plano, como en la figura 1.20. A diferencia de lo que ocurre con los grafos eulerianos, no se conoce una condición necesaria y suficiente, sencilla y útil, para que un grafo sea hamiltoniano. Una obvia condición necesaria es  $\delta(G) \geq 2$ , pero no es suficiente.

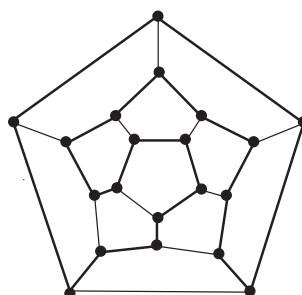


Figura 1.20: Grafo del dodecaedro.

Tampoco es suficiente una condición del tipo  $\delta(G) \geq k$ , con  $k$  constante. Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.45** (Ore, 1960). *Si un grafo tiene  $n \geq 3$  vértices y la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es mayor o igual que  $n$ , entonces el grafo es hamiltoniano.*

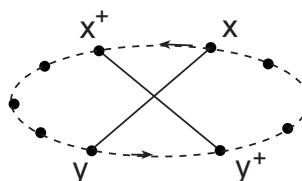


Figura 1.21: Teorema de Ore.

*Demostración.* Consideremos el grafo completo  $K$  con el mismo conjunto de vértices que  $G$ . De todos los ciclos hamiltonianos en  $K$  tomemos uno  $C$  que tenga el mayor número posible de aristas en  $G$ . Si  $x$  es un vértice de  $C$ , llamemos  $x^+$  a su sucesor en el ciclo. Probaremos que  $C$  tiene todas sus aristas en  $G$ . Para ello supongamos por absurdo que una arista  $xx^+$  no pertenezca a  $G$ . Sea  $S$  el conjunto de todos los vértices de  $G$  adyacentes a  $x$ . Sea  $S^+ = \{y^+ : y \in S\}$ . Es claro que  $|S^+| = |S| = g(x)$ . Afirmamos que  $x^+$  es adyacente a algún  $y^+ \in S^+$ . En efecto, si no fuese así, como  $x^+ \notin S^+$ , los vértices adyacentes a  $x^+$  estarían contenidos en  $V(G) \setminus (S^+ \cup \{x^+\})$  y por lo

tanto  $g(x^+) \leq n - |S^+| - 1 = n - g(x) - 1$ , de donde  $g(x^+) + g(x) \leq n - 1 < n$ , contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto existe  $y^+ \in S^+$  adyacente a  $x^+$ . Pero esto nos permite cambiar las aristas  $xx^+$  y  $yy^+$  de  $C$  por las aristas  $xy$  y  $x^+y^+$  (ver figura 1.18) obteniendo un nuevo ciclo hamiltoniano  $C'$  en  $K$  que tiene al menos una arista más en  $G$  que  $C$ , lo cual es absurdo.  $\square$

**Corolario 1.1.46** (Dirac, 1952). *Si  $G = (V, E)$  es un grafo de orden  $n \geq 3$  y grado mínimo  $\delta(G) \geq n/2$ , entonces es hamiltoniano.*

*Demostración.* Si  $u$  y  $v$  son vértices no adyacentes de  $G$  entonces  $g(u) + g(v) \geq \delta(G) + \delta(G) \geq n/2 + n/2$ , y por el teorema anterior  $G$  es hamiltoniano.  $\square$

## 1.2. Grafos planares

Una *representación* de un grafo  $G = (V, E)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  es una correspondencia que a cada vértice  $v \in V$  le asocia un punto  $P_v \in \mathbb{R}^2$  y a cada arista  $e \in E$  con extremos  $u$  y  $v$  le hace corresponder una curva continua y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^2$  (es decir una función continua e inyectiva de un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$ ) que tenga como extremos a  $P_u$  y  $P_v$ . A estas curvas les llamaremos *líneas* de la representación. Todas las figuras de grafos que se muestran en las páginas precedentes son representaciones planas, en las cuales generalmente las líneas son segmentos rectilíneos.

A una representación plana tal que si dos líneas se intersectan lo hacen en un extremo común se le llama *grafo plano*.

Un grafo es *planar* si puede ser representado como un grafo plano. Por ejemplo la figura 1.22 muestra dos representaciones de  $K_4$ . En la representación de la izquierda hay dos líneas que se cruzan, por lo tanto no es un grafo plano. La representación de la derecha sí es un grafo plano. Por lo tanto  $K_4$  es planar.

Las líneas de un grafo plano dividen al plano en regiones abiertas y disjuntas que se llaman *caras*, y son las componentes conexas del complemento en  $\mathbb{R}^2$  de la unión de todas las líneas y puntos del grafo. Como los grafos planos son acotados (porque cada línea lo es), todas sus caras son acotadas excepto una de ellas. Por ejemplo en la figura 1.23 se muestra un grafo plano con 5 caras, 4 acotadas y una no acotada.

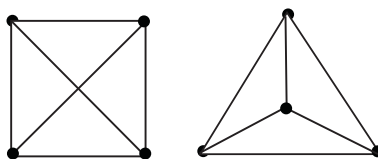
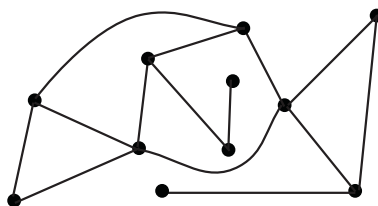
Figura 1.22:  $K_4$  es planar.

Figura 1.23: Grafo plano con 5 caras.

**Teorema 1.2.1** (Euler). *Si un grafo plano conexo tiene  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras, entonces*

$$V - A + C = 2.$$

*Demostración.* Para un número de vértices  $V$  fijo, procedamos por inducción en el número de aristas. El paso base es  $A = V - 1$ , en cuyo caso el grafo es un árbol (ver teorema 1.1.31) y por lo tanto es acíclico. Al no contener ciclos no hay ninguna cara acotada y por lo tanto  $C = 1$  (la única cara es la región no acotada). Entonces  $V - A + C = 1 + 1 = 2$ .

Supongamos ahora que  $G$  tiene  $A > V - 1$  aristas y que el resultado es cierto para grafos planos conexos con  $V$  vértices y menos de  $A$  aristas. Sea  $e$  una arista perteneciente a un ciclo ( $G$  contiene algún ciclo por el teorema 1.1.31). Entonces el grafo  $G' = G - e$  tiene  $V' = V$  vértices,  $A' = A - 1$  aristas y su número de caras es  $C' = C - 1$ , ya que al quitar  $e$  hay dos caras de  $G$  que se conectan y pasan a ser una sola. Por lo tanto  $V - A + C = V' - A' + C'$ , pero por la hipótesis inductiva  $V' - A' + C' = 2$ .  $\square$

Por ejemplo en el grafo de la figura 1.23 se tiene  $V = 11$ ,  $A = 14$ ,  $C = 5$  y  $V - A + C = 11 - 14 + 5 = 2$ .

El teorema precedente puede aplicarse a los poliedros convexos, ya que el grafo formado por los vértices y aristas de estos objetos siempre es plano.

En efecto, si nos imaginamos el poliedro transparente y nos acercamos lo suficiente a una de las caras, desde afuera, entonces veremos el borde de esa cara y todas las aristas restantes del poliedro dentro de ella, formando un grafo plano (más formalmente, lo que se hace es proyectar el poliedro desde un punto exterior a una cara y suficientemente cercano a ella, sobre el plano de la cara). Las figuras 1.8 y 1.20 muestran el resultado de este procedimiento para el cubo y el dodecaedro, respectivamente.

Una *triangulación* es un grafo plano en el cual todas las caras (incluso la no acotada) tiene una frontera triangular (es decir, un ciclo de longitud tres como borde). Es fácil ver que cualquier grafo plano con 3 o más vértices puede convertirse en una triangulación añadiendo un número conveniente de aristas. Por ejemplo en la figura 1.24 se muestra un grafo plano con 5 aristas (en trazo continuo) que se convierte en una triangulación al agregarle 6 aristas (en trazo punteado).

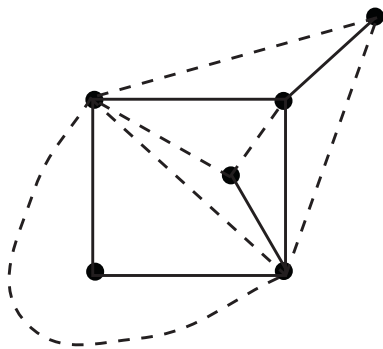


Figura 1.24: Triangulación.

**Teorema 1.2.2.** *Una triangulación plana con  $n$  vértices tiene  $3n - 6$  aristas. Un grafo plano con  $n \geq 3$  vértices tiene a lo sumo  $3n - 6$  aristas.*

*Demostración.* Como en una triangulación cada cara tiene 3 aristas como frontera, y cada arista es borde de dos caras, se cumple que  $3C = 2A$ . Pero por el teorema 1.2.1 se tiene  $V - A + C = 2$ , y multiplicando por 3 resulta  $3V - 3A + 3C = 6$ , de donde  $A = A + (2A - 3C) = 3V - 6$ . Como cualquier grafo plano con  $n \geq 3$  vértices puede convertirse en una triangulación agregando aristas, la segunda afirmación del teorema es consecuencia de la primera.  $\square$

**Teorema 1.2.3.**  *$K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares.*

*Demostración.* Por el teorema anterior un grafo planar con 5 vértices puede tener como máximo  $3 \cdot 5 - 6 = 9$  aristas, pero  $K_5$  tiene  $\binom{5}{2} = 10$ , por lo tanto no es planar.

El caso de  $K_{3,3}$  es más difícil, ya que tiene 6 vértices y 9 aristas, y  $3 \cdot 6 - 6 = 12 \geq 9$ . Sin embargo  $K_{3,3}$  no contiene ningún triángulo, por lo cual, si pudiese representarse como un grafo plano, éste tendría cada cara limitada por un ciclo de longitud al menos 4. Por lo tanto  $2A \geq 4C$ , y combinando esto con  $V - A + C = 2$  resulta  $A \leq A + (A - 2C) = 2(A - C) = 2(V - 2)$ . Pero esto es imposible para  $K_{3,3}$  pues  $9 > 8$ .  $\square$

Obviamente  $K_n$  no es planar si  $n \geq 5$ , y  $K_{m,n}$  no es planar si  $m \geq 3$  y  $n \geq 3$ . En cambio es fácil ver que si  $m \leq 2$  o  $n \leq 2$  entonces  $K_{m,n}$  es planar.

Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  contienen, por así decirlo, la semilla de la no planaridad, como muestra el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.4** (Kuratowski, 1930). *Un grafo es planar si y sólo si no contiene a una subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  como subgrafo.*

### 1.2.1. Extensiones del concepto de grafo

El concepto de grafo simple admite varias generalizaciones. Una de ellas consiste en admitir aristas que tienen un solo extremo. Este tipo de aristas se llaman *bucles* o *lazos*, y se pueden visualizar como líneas que parten de un vértice y vuelven a él.

Otra generalización consiste en admitir más de una arista con los mismos extremos. Este tipo de grafos se denomina *multigrafo*.

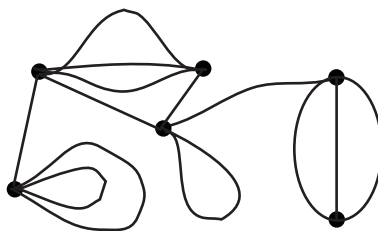


Figura 1.25: Multigrafo.

Una manera de formalizar estas ideas es definir un multigrafo como una terna  $G = (V, E, \psi)$  donde  $V$  es el conjunto de vértices,  $E$  es el conjunto de aristas y  $\psi : E \rightarrow P(V)$  es una función, siendo  $P(V) = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$

el conjunto de todos los pares no ordenados de elementos (diferentes o no) de  $V$ . La función  $\psi$  se llama *función de incidencia*. Para cada arista  $e \in E$ ,  $\psi(e)$  contiene los extremos de  $e$ . Si  $|\psi(e)| = 1$  entonces  $e$  es un bucle, de lo contrario  $|\psi(e)| = 2$ .

Muchos de los conceptos que hemos visto para grafos se pueden aplicar a los multigrafos, pero en algunos casos hay que hacer adaptaciones más o menos obvias. Por ejemplo al definir el grado de un vértice, se considera que cada bucle aporta dos unidades al grado de su único extremo. De esta manera el teorema de Euler sobre la suma de los grados (1.1.4) es válido también para multigrafos.

Las caminatas abiertas y cerradas se definen igual que para los grafos simples, pero un camino o un ciclo no se pueden especificar dando solamente los vértices. Un camino se define entonces como una caminata que tiene todos los vértices diferentes, y un ciclo como una caminata con todos los vértices diferentes excepto el primero y el último. De este modo puede definirse la noción de multigrafo conexo. La caracterización de los grafos eulerianos (teoremas 1.1.41 y 1.1.42) sigue siendo válida para multigrafos. Por ejemplo el problema de los siete puentes de Königsberg (ver figura 1.18), en vez de modelarlo con un grafo simple como en la figura 1.19, puede modelarse de manera más natural con un multigrafo, como en la figura f13-20, donde cada vértice representa una de las cuatro regiones de la ciudad y cada arista un puente.

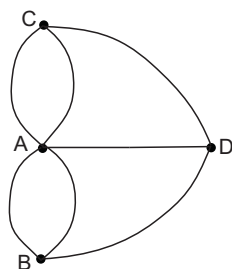


Figura 1.26: Multigrafo de los 7 puentes de Königsberg.

### 1.3. Digrafos

Otra generalización del concepto de grafo es la siguiente:

**Definición 1.3.1.** Un *grafo dirigido* o *digrafo* es una cuaterna  $G = (V, E, \phi, \psi)$  donde  $V$  es un conjunto de elementos llamados vértices,  $E$  es un conjunto de elementos llamados *arcos*, y  $\phi$  y  $\psi$  son dos funciones de  $E$  en  $V$ . Para cada  $e \in E$ , a  $\phi(e)$  se le llama *origen* y a  $\psi(e)$  se le llama *extremo* de  $e$ .

Obsérvese que un digrafo es como un multigrafo en el cual a cada arista se le ha asignado un sentido.

Los digrafos se representan dibujando, para cada vértice  $v$ , un punto  $P_v$ , y para cada arco de origen  $v$  y extremo  $w$ , una flecha (segmento dirigido) desde  $P_v$  hasta  $P_w$ .

*Ejemplo 1.3.2.* En la figura 1.27 se representa un digrafo con 5 vértices y 8 arcos, uno de los cuales es un bucle con origen y extremo  $x$ . Observe que un arco va de  $v$  a  $w$  y otro en el sentido opuesto, de  $w$  a  $v$ . También hay dos arcos *paralelos* de  $x$  a  $y$ .

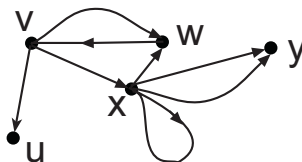


Figura 1.27: Digrafo.

Todo digrafo tiene un grafo (o multigrafo) subyacente, que se obtiene olvidando el sentido de los arcos y considerándolos como aristas no orientadas. De esta manera muchos conceptos de la teoría de grafos se pueden aplicar a los digrafos, como por ejemplo las nociones de grado, camino, grafo conexo, etc. Otras definiciones se adaptan de manera más o menos obvia, por ejemplo se pueden definir sub-digrafos, isomorfismo de digrafos, etc.

**Definición 1.3.3.** El *grado saliente*  $g^+(v)$  de  $v \in V$  es el número de arcos que tienen a  $v$  como origen, y su *grado entrante*  $g^-(v)$  es el número de arcos que lo tienen como extremo.

Obviamente

$$g(v) = g^+(v) + g^-(v).$$

El teorema 1.1.4 sobre la suma de los grados, toma para digrafos la siguiente forma:

$$\sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v) = |E|.$$



**Definición 1.4.2.** Un grafo  $G$  es  $k$ -colorable si admite una coloración con  $k$  colores. Al menor  $k$  tal que  $G$  es  $k$ -colorable se le llama *número cromático* de  $G$  y se denota  $\chi(G)$ .

Obviamente todo grafo de orden  $n$  es  $n$ -colorable.  $K_n$  no se puede colorear con menos de  $n$  colores, pues como todos sus vértices son adyacentes cada uno debe pintarse de un color diferente. Por lo tanto  $\chi(K_n) = n$ . Si llamamos  $\omega(G)$  al orden del mayor subgrafo completo de  $G$ , entonces se tiene

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq n.$$

Un camino de longitud  $n > 2$  tiene número cromático 2, ya que sus vértices pueden pintarse con dos colores en forma alternada, comenzando por un extremo. Más en general cualquier árbol de orden  $n > 2$  tiene número cromático 2. En efecto, si se toma un vértice  $u$  como raíz y se pinta del color 1, y los adyacentes a  $u$  se pintan de color 2, y los que están a distancia 2 de  $u$  se pintan de color 1, y los que están a distancia 3 de  $u$  se pintan de color 2, y así sucesivamente, es claro que se obtiene una 2-coloración.

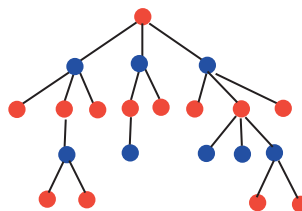


Figura 1.29: Los árboles son 2-colorables.

*Ejemplo 1.4.3.* En unas jornadas científicas se van a dictar cierto número de conferencias. Si los horarios de dos conferencias se solapan, éstas tienen que dictarse en salones distintos. Consideremos el grafo  $G$  que tiene como vértices a las conferencias, y en el cual dos conferencias son adyacentes si y sólo si sus horarios se solapan. Entonces decir que  $G$  es  $k$ -colorable equivale a decir que  $k$  salones son suficientes para dictar todas las conferencias. El mínimo número de salones necesario para poder dictar todas las conferencias es el número cromático  $\chi(G)$ .

### 1.4.1. Algoritmo avaricioso

Dado un grafo numeremos sus vértices como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y los colores como  $1, 2, 3, \dots$ . El *algoritmo avaricioso* (en inglés *greedy*) intenta colorear el grafo por vértices ahorrando todos los colores que pueda.

1. Asigne el color 1 al vértice  $v_1$ .
2. Para cada  $i$  desde 2 hasta  $n$ , asigne a  $v_i$  el color con el menor número posible que no haya sido ya usado para colorear un vértice adyacente al  $v_i$ .

Lamentablemente los resultados del algoritmo avaricioso no siempre son los mejores, y dependen de la numeración escogida. Por ejemplo para un camino  $v_1v_2v_3v_4$ , con los vértices numerados en ese orden, el algoritmo avaricioso halla una coloración óptima con dos colores ( $v_1$  y  $v_3$  reciben el color 1 mientras que  $v_2$  y  $v_4$  reciben el color 2). Pero si los vértices se examinan en el orden  $v_1, v_2, v_4, v_3$  entonces el algoritmo halla una coloración que usa tres colores.

En todo caso el algoritmo avaricioso permite obtener una cota superior para el número cromático: lo peor que puede pasar cuando se va a colorear un vértice  $v_i$  es que todos sus adyacentes ya hayan sido coloreados con los colores  $1, 2, \dots, g(v_i)$ , en cuyo caso tendremos que usar el color  $g(v_i) + 1$  para colorear  $v_i$ . Por lo tanto si  $\Delta(G)$  es el máximo grado, entonces  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Por otra parte si  $\omega(G)$  es el *número de clique* de  $G$ , es decir el orden del mayor subgrafo completo de  $G$ , entonces debe ser  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Combinando estas desigualdades resulta

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

La acotación  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  en general no puede mejorarse, ya que para el grafo completo  $K_n$  el número cromático es  $n$  y el grado máximo  $n - 1$ , y se verifica la igualdad. También se da la igualdad para los ciclos de longitud impar, que tienen número cromático 3 y máximo grado 2. En los grafos conexos éstos son los únicos casos en que se alcanza la igualdad, y por lo tanto:

**Teorema 1.4.4** (Brooks, 1941). *Si  $G$  es un grafo conexo que no sea completo ni un ciclo de longitud impar, entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Cualquier grafo bipartito  $G = (V, E)$  que contenga al menos una arista tiene número cromático 2. En efecto, si  $V$  se parte en dos subconjuntos de vértices independientes  $V_1$  y  $V_2$  entonces basta colorear a los vértices de  $V_1$  con un color y a los de  $V_2$  con otro.

En particular cualquier árbol  $A$  de orden  $n \geq 2$  tiene número cromático 2, ya que es bipartito. Otra manera de verlo es que si se toma un vértice  $u$  como raíz y se pinta del color 1, y los adyacentes a  $u$  se pintan de color 2, y los que están a distancia 2 de  $u$  se pintan de color 1, y los que están a distancia 3 de  $u$  se pintan de color 2, y así sucesivamente, es claro que se obtiene una 2-coloración. Como un color no es suficiente si  $n \geq 2$ , se tiene  $\chi(A) = 2$ .

Para grafos planares se tiene el importante *Teorema de los cuatro colores*:

**Teorema 1.4.5** (Appel & Haken, 1976). *Todo grafo planar es 4-colorable.*

Además, si el grafo no contiene triángulos (es decir ciclos de longitud 3) se tiene lo siguiente:

**Teorema 1.4.6** (Grötzsch, 1959). *Todo grafo planar sin triángulos es 3-colorable.*

### 1.4.2. Coloración de mapas

Los mapas se colorean de modo tal que países con un segmento de frontera común (un solo punto no cuenta) tengan colores diferentes. Aunque algunos mapas se pueden colorear con menos de 4 colores, algunos requieren cuatro colores, como muestra el mapa de un país rodeado por otros tres en la figura 1.30.

En 1850 Francis Guthrie, luego de colorear el mapa de Inglaterra con cuatro colores, planteó el problema de si cuatro colores eran suficientes para colorear cualquier mapa. El problema fue propuesto a De Morgan, quien no pudo resolverlo. Algunos otros matemáticos prestigiosos lo intentaron sin éxito, hasta que en 1879 Kempe publicó una demostración que le dio mucha fama. Sin embargo 11 años después, en 1890, Heawood descubrió que la demostración de Kempe tenía un error. Heawood intentó corregir el error pero no tuvo éxito, sólo consiguió probar un resultado más débil, a saber, que cinco colores son suficientes (este resultado es el *teorema de los cinco colores*). Sin embargo, nadie pudo conseguir un mapa que no se pudiese colorear con cuatro colores.

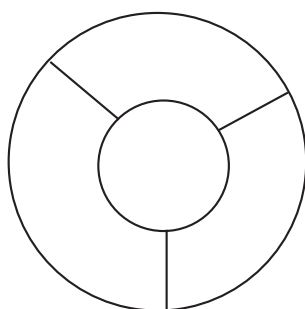


Figura 1.30: Mapa que requiere 4 colores.

Colorear mapas equivale a colorear las caras de un grafo plano. Este problema a su vez equivale a uno de coloración por vértices, en un grafo llamado *grafo de caras*, el cual tiene un vértice para cada cara del grafo original y donde dos vértices se unen con una arista si y sólo si las caras correspondientes tienen un segmento de frontera común (un solo punto no cuenta). Este nuevo grafo también es planar.

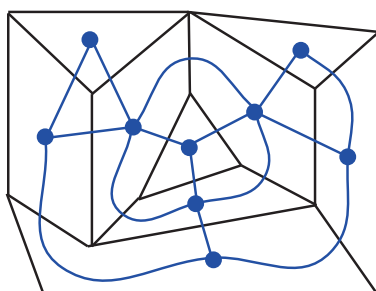


Figura 1.31: Grafo de caras de un grafo plano.

La conjetura de los 4 colores equivale entonces a la afirmación de que todo grafo planar es 4-colorable por vértices. Este problema, que permaneció abierto más de un siglo desde que fuera planteado por Guthrie, fue resuelto en 1976 por K. Appel y W. Haken con ayuda de un complejo programa y 1200 horas de computador. Su método consistió en reducir el problema a un número finito (pero muy grande) de casos, los cuales analizaron con el computador.

Esto provocó muchas objeciones, porque por primera vez los matemáticos no podían verificar cada uno de los pasos de una demostración y tenían que confiar en la corrección del programa y en el funcionamiento correcto del computador. Luego de que se realizó la prueba en forma independiente, en otros computadores, con el mismo resultado, la confianza fue creciendo.

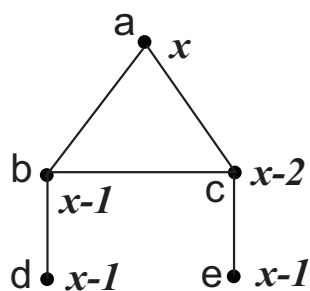
### 1.4.3. Polinomio cromático

**Definición 1.4.7.** Dado un grafo  $G$  y un número natural  $x$ , llamemos  $P_G(x)$  al número de coloraciones por vértices de  $G$  con colores  $\{1, 2, \dots, x\}$ . A  $P_G(x)$  se le llama *polinomio cromático* de  $G$ , ya que como veremos siempre es un polinomio en  $x$ .

*Ejemplo 1.4.8.* Para un grafo  $G$  de  $n$  vértices sin aristas se tiene  $P_G(x) = x^n$ . Para un grafo completo  $P_{K_n}(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ .

Para un árbol  $G$  con  $n$  vértices se tiene  $P_G(x) = x(x-1)^{n-1}$ , ya que tomando un vértice como raíz y coloreándolo con cualquiera de los  $x$  colores disponibles, cada vértice restante se puede colorear con cualquiera de los  $x-1$  colores diferentes al de su padre.

Para hallar el polinomio cromático del grafo  $G$  de la figura comenzamos por asignar al vértice  $a$  uno cualquiera de los  $x$  colores disponibles. Ahora  $b$  se puede pintar con cualquiera de los  $x-1$  colores restantes;  $c$  sólo se puede pintar de  $x-2$  maneras, ya que no puede tener igual color que  $a$  ni que  $b$ ;  $d$  se puede pintar con cualquier color diferente al de  $b$ , es decir  $x-1$  posibilidades;  $e$  se puede pintar con cualquier color diferente al de  $c$ , es decir  $x-1$  posibilidades.



Por el principio del producto  $P_G(x) = x(x-1)(x-2)(x-1)(x-1) = x(x-1)^3(x-2)$ .

Si  $e = uv \in E$ , recordemos que  $G - e$  es el grafo que resulta al suprimir la arista  $e$ , y  $G/e$  es el grafo que resulta de la contracción de  $e$  a un punto.

**Lema 1.4.9.** Si  $e \in E$  entonces  $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x)$ .

*Demostración.* Las coloraciones de  $G-e$  con  $x$  colores son de dos tipos: (1) las que asignan colores diferentes a  $u$  y  $v$ , y (2) las que asignan el mismo color a  $u$  y a  $v$ . Las del tipo (1) son tantas como las coloraciones de  $G$ , es decir  $P_G(x)$ . Las del tipo (2) son tantas como las coloraciones de  $G/e$ , es decir  $P_{G/e}(x)$ . Por lo tanto  $P_{G-e}(x) = P_G(x) + P_{G/e}(x)$ , de donde  $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x)$ .  $\square$

*Ejemplo 1.4.10.* Para hallar el polinomio cromático de  $G = C_4$  sea  $e$  una de las aristas. Entonces  $G-e$  es un camino, por lo tanto  $P_{G-e}(x) = x(x-1)^3$ .  $G/e$  es un triángulo ( $K_3$ ), por lo tanto  $P_{G/e}(x) = x(x-1)(x-2)$ . Finalmente  $P_G(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) = x(x-1)[(x-1)^2 - (x-2)] = x(x-1)(x^2 - 2x + 1 - x + 2) = x(x-1)(x^2 - 3x + 3)$ .

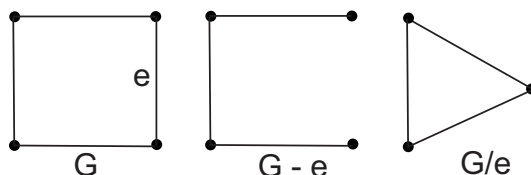


Figura 1.32: Cálculo de  $P_{C_4}(x)$ .

**Teorema 1.4.11.**  $P_G(x)$  es siempre un polinomio en  $x$ .

*Demostración.* Por inducción en el número  $m$  de aristas. Si  $m = 0$  y el grafo  $G$  tiene  $n$  vértices entonces  $P_G(x) = x^n$  es un polinomio. Si  $m > 0$  y suponemos el resultado cierto para grafos con menos de  $m$  aristas, entonces sea  $e$  una arista de  $G$ . Por el lema anterior  $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x)$ . Pero  $G-e$  y  $G/e$  tienen menos de  $m$  aristas, y entonces por la hipótesis inductiva  $P_{G-e}(x)$  y  $P_{G/e}(x)$  son polinomios en  $x$ , y también lo será su diferencia  $P_G(x)$ .  $\square$

## 1.5. Coloración de grafos por aristas

**Definición 1.5.1.** Dado un conjunto de colores  $C$ , una *coloración por aristas* de un grafo  $G = (V, E)$  es una función  $f : E \rightarrow C$  tal que si  $e, f \in E$  son aristas incidentes (es decir con un extremo común) entonces  $f(e) \neq f(f)$ .

En otras palabras, una coloración por aristas de un grafo es una asignación de colores a las aristas de manera tal que a cada par de aristas con un extremo común les correspondan colores diferentes.

Muchos problemas de elaboración de horarios y planificación de tareas pueden modelarse como problemas de coloración de grafos por aristas.

### 1.5.1. Grafo de líneas

**Definición 1.5.2.** El *grafo de líneas* de un grafo  $G = (V, E)$  es el grafo  $L(G) = (E, F)$  que tiene como vértices a las aristas de  $G$ , y en el cual dos vértices son adyacentes si y sólo si, considerados como aristas de  $G$ , son incidentes.

La figura 1.33 muestra un grafo  $G$  a la izquierda y a la derecha su correspondiente grafo de líneas  $L(G)$ .

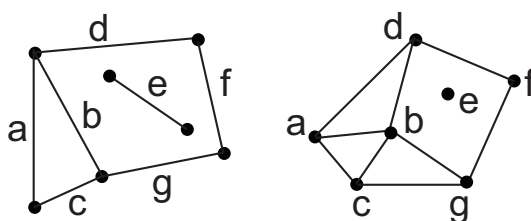


Figura 1.33: Grafo de líneas.

**Definición 1.5.3.** Un grafo  $G$  es  $k$ -colorable por aristas si admite una coloración por aristas con  $k$  colores. Al menor  $k$  tal que  $G$  es  $k$ -colorable por aristas se le llama *índice cromático* de  $G$  y se denota  $\chi'(G)$ .

Obviamente  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .

Observe que a cada coloración por aristas de un grafo  $G$  le corresponde una coloración por vértices de su grafo de líneas  $L(G)$ , y recíprocamente. esto significa que el problema de colorear por aristas un grafo  $G$  es equivalente al de colorear por vértices su grafo de líneas  $L(G)$ . En particular  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ .

*Ejemplo 1.5.4.* Consideremos la tabla de horarios de un liceo. Se puede construir un multigrafo bipartito tomando como conjunto de vértices  $V_1$  a los profesores, y como conjunto de vértices  $V_2$  a los grupos. Por cada clase que

un profesor debe dictar a un grupo durante la semana se traza una arista del profesor al grupo. Supongamos que cada clase dura una hora. Entonces tomemos como conjunto de colores las horas posibles (por ejemplo lunes de 8 a 9, martes de 11 a 12, etc.) A cada arista se le debe asignar un horario de modo tal que las que salen de un mismo profesor tengan horarios diferentes, y las que llegan a un mismo grupo también.

El índice cromático de este multigrafo representa la mínima longitud total de la tabla de horarios (es decir el menor número total de horas ocupadas en la semana).

### 1.5.2. Teoremas sobre el índice cromático

Como los grafos de líneas son un tipo especial de grafos, se sabe mucho más sobre  $\chi'(G)$  que sobre  $\chi(G)$ .

**Teorema 1.5.5** (König, 1916). *Si  $G$  es un grafo bipartito entonces  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

**Teorema 1.5.6** (Vizing, 1964). *Para todo grafo  $G$  se tiene*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Este teorema reduce a sólo *dos posibilidades* el valor del índice cromático:  $\Delta(G)$  o  $\Delta(G) + 1$ .

---

## Bibliografía

---

- [B2] Berge, C., *The Theory of Graphs and its applications*, Methuen & Co - John Wiley & Sons, London - New York, 1962.
- [B3] Bollobas, B., *Modern Graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [D1] Diestel, R., *Graph Theory, 2nd ed.*, Springer, New York, 2000.
- [H2] Harary, F. *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [R6] Rodríguez, J., *Teoría de Grafos*, Kariña Editores, Mérida, 2003.

- árbol, 11
- algoritmo
  - avaricioso, 27
- arco, 24
- bosque, 13
- caminata, 15
- camino, 4, 9
  - hamiltoniano, 17
- ciclo, 5
  - hamiltoniano, 17
- coloración
  - por vértices, 25
- componente
  - fuertemente conexa, 25
- componente conexa, 13
- conectividad, 14
- conectividad por aristas, 15
- contracción, 8
- diámetro, 10
- digrafo, 24
  - fuertemente conexo, 25
- distancia, 9
- Euler, 17
- Euler, L., 19
- extremo, 24
- grado, 2
  - entrante, 24
  - saliente, 24
- grafo
  - acíclico, 7
  - bipartito, 4
  - cúbico, 5
  - completo, 4
  - conexo, 10
  - dirigido, 24
  - euleriano, 15
  - hamiltoniano, 17
  - planar, 19
  - plano, 19
  - regular, 5
  - simple, 1
- Hamilton, William R., 17
- multigrafo, 22
- número
  - de clique, 27

orden, 2  
Ore, O., 18  
origen, 24

puente, 14

radio, 10  
representación, 19

subdivisión, 9  
subgrafo, 6  
subgrafo inducido, 6  
supergrafo, 6

teorema  
  de los cuatro colores, 28

triangulación, 21

vértice  
  central, 10  
  de corte, 14